Tome 1

4ème

CLS

Section Technique

Mathématique



√ Conforme aux programmes

√ Corrigés de livre scolaire

√ Devoires et exercices corrigés

Spécifique et Spécialité



Préparer par : Abroug Fethi (Professeur principal)
Riahi Mouhamed Ali (Professeur principal)

Sommaire

Exercice n° 1

$f(x)=(x-2)^3 . x\in\mathbb{R}$

a) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)^3=0$.

b) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3}=+\infty$.

Car $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$ et $f(x)>0$ *pour* $x>2$.

$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty$.

car $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$ et

$f(x)<0$ *pour* $x<2$.

c) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ et $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

Donc la droite $x=2$ est une asymptote verticale

pour la courbe de $\frac{1}{f}$.

Exercice n° 2



$f(x)=\frac{2x}{x+1} . D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

T.V :

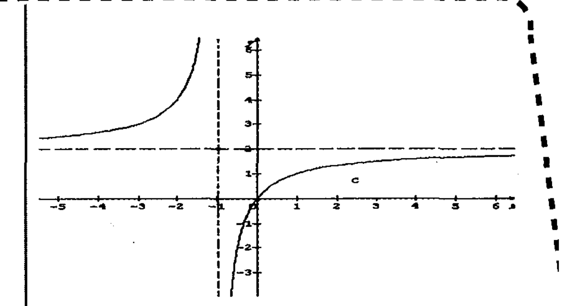
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 2

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2}=2$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$

$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=-\infty$

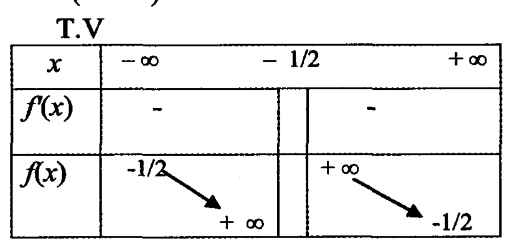
$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$



$g(x)=\frac{-x+1}{2x+1} . D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

$g'(x)=\frac{-3}{(2x+1)^2}<0$

T.V

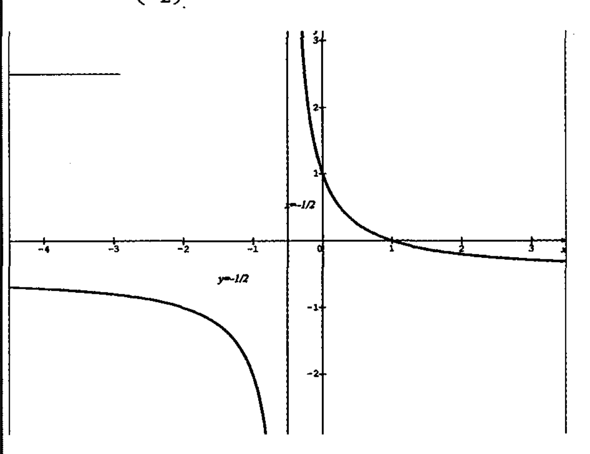


x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	||	-
$f(x)$	-1/2 ↘ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘ -1/2

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{-x+1}{2x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{-x+1}{2x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{0^-}=-\infty$



*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2.$

Donc la droite $y=2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{1}{2}.$

Donc la droite $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_g voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc la droite $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_g au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice n° 3

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x-\sqrt{1-x}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}1-x-\sqrt{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}^{\,2}-\sqrt{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-1\right)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}.\begin{cases}\sqrt{x^2}=|x|=-x\\ car x<0\end{cases}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0$

Exercice n° 4

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}\left(1-\sqrt{x+1}\right)=-\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=-1$

*/

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^6}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^6}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^4}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2}=\frac{-1}{+\infty}=0.$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

*/ on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$: $-3 \le 3\cos x \le 3$
D'où
$$2x+1-3 \le 2x+1+3\cos x \le 2x+1+3$$
$$2x-2 \le 2x+1+3\cos x \le 2x+4$$

et comme on a :

* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1+3\cos x=+\infty$

*

$2x+1+3\cos x \le 2x+4$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+4=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1+3\cos x=-\infty$

Exercice n° 5

a) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x\sqrt{x-2}}=?$

$\lim\limits_{x\to2^+} x\sqrt{x-2}=0$ et $x\sqrt{x-2}>0$ pour x >2

Donc $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x\sqrt{x-2}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}^2}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$$

Or $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}=0$

et $(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}\ge0$ d'où

$$\lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Et par suite : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+x^2-x-2}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2(x^3-1)+x^2-x}{x^2+3x-4}$

on a :

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ *et* $x^2-x=x(x-1)$

$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

Car : $a+b+c=0, x'=1, x''=\dfrac{c}{a}=-4.$

D'où $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2(x^3-1)+x^2-x}{x^2+3x-4}$

$$=\lim_{x\to1} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\left[2x^2+2x+2+x\right]}{(x-1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to1} \frac{2x^2+3x+2}{x+4}=\frac{7}{5}$$

d) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=?$

On a : $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\sqrt{x-1}=0$

et $(x-1)\sqrt{x-1}\ge0$ pour $x\ge1$

D'où $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim\limits_{x\to4} \dfrac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$

$$=\lim_{x\to4} \frac{(x+5)-3^2}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4} \frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

f) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=$

$$=\lim_{x\to3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3} \frac{(x+1-4)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2-1)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Exercice n° 6

a)

*/ $f(x)=\dfrac{x}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$, f est définie si

$x\geq 0$

f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

*/ $g(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

g est une fonction rationnelle donc elle est définie et continue sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}^*$.

*/ la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. car $x\mapsto\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}$ est définie sur $IR\setminus\{-4\}$ et $h(-4)=a$.

Pour la continuité voir 2).

b) */ pour $f(x)=\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$, $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)^2=+\infty$

*/ pour $g(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{2x}=+\infty$

Pour $\begin{cases}h(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}, x\neq-4\\ h(-4)=a\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-4} h(x)=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}$

Or pour l'équation: $x^2+3x+4=0$ on a: $a+b+c=0$

D'où $x'=1, x''=\dfrac{c}{a}=-4$

Par suite: $x^2+3x+4=(x-1)(x+4)$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+3x+4}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x-1)(x+4)}{x+4}=\lim_{x\to-4}(x-1)=-5.$$

Donc puisque : $h(-4)=a$ alors la fonction h est continue en $x_0=-4$ pour $\boxed{a=-5}$.

Exercice n° 7

$x\in\left[-\dfrac{5}{2},2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$

a) $x\in\left[-\dfrac{5}{2},2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\setminus\{-2\}=I$

On a : $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{\left[(x+1)-\sqrt{2x+5}\right]\left[(x+1)+\sqrt{2x+5}\right]}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{(x+1)^2-\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{x^2+2x+1-2x-5}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{x^2-4}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}}, x\in I$$

b) $\lim\limits_{x\to2} g(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$

$=\dfrac{3+\sqrt{9}}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Donc g admet un prolongement par continuité h tel que :

$$\begin{cases}h(x)=g(x).\quad pour\, x\neq2\\ h(2)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Exercice n° 8

*/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}=\frac{5}{2}$

*/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$. (Posons $h=3x$.)

$$=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{\left(\frac{h}{3}\right)^2}=\lim_{h\to0}\underbrace{\left(\frac{1-\cos h}{h^2}\right)}_{\frac{1}{2}}\times9=\frac{9}{2}.$$

*/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}$

$$\overset{h=2x}{\Longrightarrow}\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$$

*/ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\times\overbrace{\frac{1-\cos x}{x}}^{0}\times\frac{1}{\cos x}=0$$

*/ $\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan^2 x}{x^2}}{\frac{1-\cos^2 x}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2}{\frac{1-\cos^2 x}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Exercice n° 9

● $\forall x\in\mathbb{R}:-1\le\cos x\le1$

$$\Leftrightarrow 1\le2+\cos x\le3$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\cos x}\le1$$

● pour $x\ge0$ on a : $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2+\cos x}\le x$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+\cos x}=+\infty$

*/ $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\le\sin x\le1$

D'où : $x-1\le x+\sin x\le x+1$ donc

pour $x\ge1$ on a :

$$0\le\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\cos x}\le1$$

$$0\le x-1\le x+\sin x\le x+1$$

en multiplions membre à membre le deux inégalités on trouve: $\frac{x-1}{3}\le\frac{x+\sin x}{2+\cos x}\le x+1$

et comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$

il résulte $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2+\cos x}=+\infty}$

Exercice n° 10

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}+\overbrace{\frac{1-\cos x}{x}}^{0}$$

$$=2\ne f(0)$$

Donc f n'est pas continue en $x_0=0$.

Exercice n° 11

La fonction : $x\mapsto1-\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en

particulier sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction : $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

Continuité en $x_0=0$:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0=f(0)\text{ (Formule)}$$

D'où f est continue en $x_0=0$.

Conclusion : f est continue sur IR* et en 0 D'où est continue sur IR.

Exercice n° 12

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

*/ sur $]-1,0[$. on a : $f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x}=-\sqrt{-x}$ donc

f est continue sur $]-1,0[$.

*/ sur $]0,1[$. on a : $f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x}=\sqrt{x}$ donc f est

f est continue sur $]0,1[$.

*/ continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{-x}=0=f(0)$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

D'où : f est continue en $x_0=0$.

Conclusion : **f est continue sur $]-1,1[$**

Exercice n° 13

$$\begin{cases} f(x)=x^2; x\in[0,1] \\ f(x)=2x-1; x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

● $f(x)=x^2$ fonction polynôme

Donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,1]$.

$f(x)=2x-1$ Fonction polynôme

Donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1,2]$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x-1=1=f(1)$$

Donc f est continue a droite en 1.

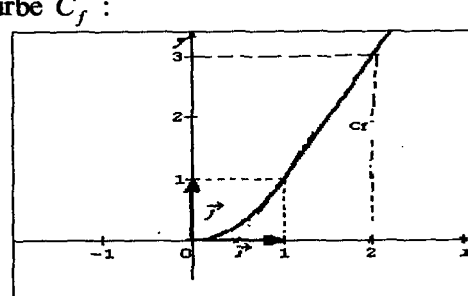
Conclusion :

f est continue sur $[0,1]$ et $[1,2]$ donc continue sur $[0,2]$.

● $\left.\begin{array}{l} f([0,1])=[0,1] \\ f(]1,2])=]1,3] \end{array}\right\} \Rightarrow f([0,2])=[0,3]$

● $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$

● Courbe C_f :



Sur $[0,1]$: C_1 est la branche de la parabole $y=x^2$.

Sur $[1,+\infty[$: C_2 est la demi - droite : $y=2x-$

$C_f=C_1\cup C_2$.

Exercice n° 14

a) $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ est une fonction rationnelle elle est continue sur son ensemble de définition donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Tableau des variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)=-\frac{1}{0^+}-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to -\infty} g(x)=-\frac{1}{\infty}=0$$

c) $g(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$

$g(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$.

Exercice n° 15

a) $f(x)=x^5+3x-2$

$f'(x)=5x^4+3>0, \forall x\in[0,1]$

f Continue sur $[0,1]$ et strictement croissante.

$f(0)=-2 \, et \, f(1)=2 \Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation : x^5+3x-2 possède une unique solution $\alpha\in]0,1[$.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{32}+\frac{3}{2}-2=\frac{1+48-64}{32}=\frac{-15}{32}<0$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}-2\simeq 0,487>0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{3}{4}\right)<0$ Donc : $\frac{1}{2}\le\alpha\le\frac{3}{4}$

Exercice n° 16

● $f(x)=x^3+2x-1, x\in]-\infty,1[$

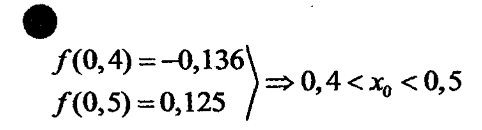
$f'(x)=3x^2+2>0$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,1[$ sur $f(]-\infty,1[)=]-\infty,2[$ et Comme $0\in]-1,2[$ alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,1[$ une unique solution x_0.

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\times f(1)<0 \Rightarrow 0<x_0<1$

Or $x^3+2x-1=0 \Leftrightarrow x^3+2x=1$ .D'où le résultat

●



$\left.\begin{array}{l} f(0,4)=-0,136 \\ f(0,5)=0,125 \end{array}\right\} \Rightarrow 0,4<x_0<0,5$

Donc une valeur approchée à 0,1 prés par défaut de x_0 est :0,4.

Exercice n° 17

●*/ $\sin x-2x+1=f(x)$.

$f'(x)=\cos x-2<0$ car $\cos x\le 1$. f est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On a : $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\pi<0$

Donc l'équation : $\sin x-2x+1=0$. admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

*/ $f\left(\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}+1\simeq 0,13$

$\beta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ Car $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

*/ $f\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\simeq -0,43$

$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

Donc $\beta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[$. Or $\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ d'où : une valeur approchée de β à $\frac{\pi}{8}$ prés est : $\frac{\pi}{4}$

● Posons $f(x)=\frac{3}{2}x-tgx$

On a : $f'(x)=\frac{3}{2}-(1+tg^2x) \quad =\frac{1}{2}-tg^2x$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow tg\frac{\pi}{4}\le tgx\le tg\frac{\pi}{3}$ (tg croissante)

D'où : $1\le tgx \le\sqrt{3} \Leftrightarrow -3\le -tg^2x \le -1$

Par la suite : $-\frac{5}{2}\le\frac{1}{2}-tg^2x\le-\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $f'(x)<0$

<u>Conclusion</u> : f est continue et strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

$f\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[\right)=\left]\frac{\pi}{2}-\sqrt{3},\frac{3\pi}{8}-1\right[$.

Comme $0\in\left]\frac{\pi}{2}-\sqrt{3},\frac{3\pi}{8}-1\right[$, l'équation $\frac{3}{2}x-tgx=0$ admet une unique solution α. dans $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

Exercice n° 18

$P(x)=2x^3-3x^2-1$

P est une fonction polynôme donc continue sur L'intervalle [1,6 ;1,7] de plus

On a : $P(1,6)=-0,488$ et $P(1,7)\approx 0,156$

D'où $P(1,6)\times P(1,7)<0$

D'où :

L'équation $P(x)=0$ admet au moins une racine réelle α comprise entre 1,6 et 1,7

Exercice n° 19

a)

$P(x)=x^6-x-1$ continue et dérivable sur $[1,2]$.

$\Rightarrow P'(x)=6x^5-1>0\ \forall x\in]1\ ;2]$ d'où P strictement croissante sur $[1,2]$.

P(1) .P(2)=(-1).61= - 61<0

Donc l'équation $P(x)=0$ admet dans $[1,2]$ une unique solution α

b) $\alpha\in[1,2]$.

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{1+2}{2}\right)=P\left(\frac{3}{2}\right)=8,89>0 \\ P(1)=-1<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1\le\alpha\le\frac{3}{2}$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right)=P\left(\frac{5}{4}\right)=1,564>0 \\ P(1)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1<\alpha<\frac{5}{4}=1,25$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2}\right)=P\left(\frac{9}{8}\right)\approx-0,09<0 \\ P\left(\frac{5}{4}\right)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1,125<\alpha<1,25$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{\frac{9}{8}+\frac{5}{4}}{2}\right)=P\left(\frac{19}{16}\right)=0,6166>0 \\ P\left(\frac{9}{8}\right)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1,125<\alpha<1,1875$

Conclusion: une valeur approché par défaut à 10^{-1} prés est : 1,1.

Exercice n° 20

$f(x)=x^2-3x|x|$

● */ Sur $]-\infty,0[$: $|x|=-x\Rightarrow$

$f(x)=x^2+3x^2=4x^2$ est une fonction polynôme donc f continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ et

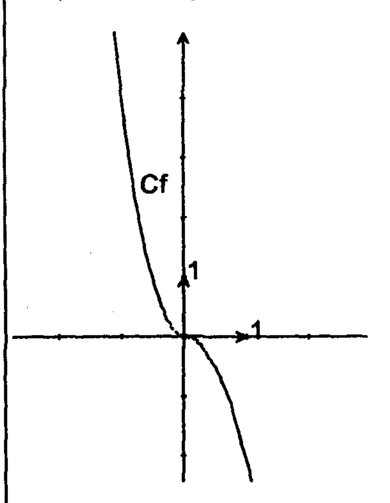
$f'(x)=8x<0$ sur $]-\infty,0[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$.

*/ Sur $]0,+\infty[$: $|x|=x$

$\Rightarrow f(x)=x^2-3x^2=-2x^2$ f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=-4x<0$ sur $]0,+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

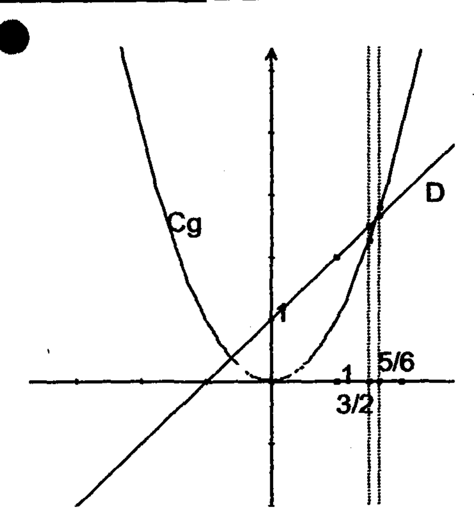
2) Courbe de f :



3) $f(]-\infty,0[)=]0,+\infty[$; $f(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$

Exercice n° 21

●



● d'après le graphe C_g et Δ se coupent en deux points

A et B tel que :

$$x_A=\beta<0 \text{ et } x_B=\alpha>0$$

Avec $g(x)=x^2$ et $\Delta : y=x+1$

Donc l'équation : $x^2=x+1$ admet deux solutions α et β

Et on a : $x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Donc $f(x)=0$ admet deux solutions $\alpha>0$ et $\beta<0$.

● a) $A\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\in\Delta ; B\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)\in\Delta$

$$A'\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)\in C_g ; B'\left(\frac{5}{3},\frac{25}{9}\right)\in C_g$$

b) On a : $x_A<\alpha<x_B$ donc $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{3}$

● a) sur $[0,+\infty[$ graphiquement

$x<\alpha \Leftrightarrow$ la courbe de g est au dessous de Δ

$\Leftrightarrow \quad x^2<x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1<0$

$\Leftrightarrow \quad f(x)<0$

Donc pour : $0<x<\alpha : f(x)<0$

b) sur $[0,+\infty[$

on a montré : $x<\alpha \Leftrightarrow f(x)<0$ or $f(\frac{3}{2})<0 \Rightarrow \frac{3}{2}<\alpha$

on montre de même $x>\alpha \Leftrightarrow f(x)>0$ et comme

$$f\left(\frac{5}{3}\right)>0 \Rightarrow \frac{5}{3}>\alpha$$

Conclusion : $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{3}$

c) $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1<0$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{25}{9}-\frac{5}{3}-1>0$$

f Continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$

Donc $f(x)=0$ admet une unique solution

$\alpha\in\left]\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right[$

● a) $f(1-\alpha)=(1-\alpha)^2-(1-\alpha)-1$

$$=1-2\alpha+\alpha^2-1+\alpha-1$$

$$=\alpha^2-\alpha-1=f(\alpha)=0$$

et $\alpha>\frac{3}{2} \Rightarrow -\alpha<-\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\alpha<-\frac{1}{2}<0$

Donc $f(1-\alpha)=0$ et $1-\alpha<0$

D'où $1-\alpha$ est une solution négative de $f(x)=0$.

b) Comme $f(x)=0$ admet une unique solution négative β on aura : $\beta=1-\alpha$

or on a :

$$\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3}<-\alpha<-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<1-\alpha<-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{2}{3}<\beta<-\frac{1}{2}}$$

Exercice n° 22

$$h(x)=\frac{x}{|x|-1}$$

1)*/ h est définie si $|x|-1\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

*/ $x\in\{-1,1\} ; -x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

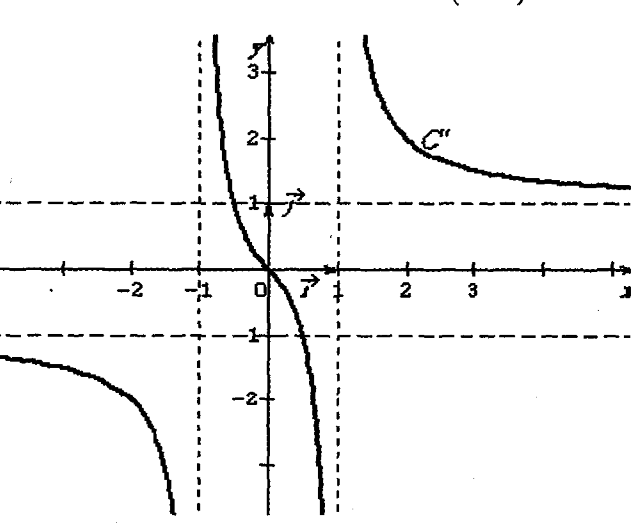
On a : $h(-x)=\frac{-x}{|-x|-1}=-\frac{x}{|x|-1}=-h(x)$

Donc h est une fonction impaire et par suite l'origine du repère est un centre de symétrie de (C').

On étudie h sur

$D_h\cap[0,+\infty[=[0,1[\cup]1,+\infty[=D_E$

$x\in D_E \Rightarrow h(x)=\frac{x}{x-1} \Rightarrow h'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$:



$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

} la droite d'éq x = 1 asymptote

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow$ *la droite d'éq* y = 1 asymptote au v+∞

2) T.V

x	0		1		$+\infty$
h'(x)	−		‖	−	
h (x)	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

$x + k = k|x| \Leftrightarrow k - k|x| = x \Leftrightarrow k(1-|x|) = x ; |x| \neq 1$

$\Leftrightarrow k = \frac{-x}{1-|x|} = \frac{x}{|x|-1} = h(x)$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C' et la droite y = k

Si $k \in [-1,1]$: une seule solution

Si $k > 1$ ou $k < -1$: deux solutions.

Exercice n° 23

$P(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

$P(-1) = -\frac{3}{2}$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

$P(0) = -\frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{1}{2}$

a)

$P'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2-1)$=3(2x-1)(2x+1)

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	−	0	+	
$P(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

* P continue et strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

$P\left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\right) = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ $0 \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ Donc

$P(x) = 0$ admet une unique solution

$x_1 \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

De même sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

<u>Conclusion :</u>

Sur $\mathbb{R}$; $P(x) = 0$ admet 3 solutions $x_1 < x_2 < x_3$.

b) • $P(-1)\times P\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ Donc $-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$

• $P(-1)\times P(0) < 0$ Donc $-1 < x_2 < 0$

• $P(0)\times P(1) < 0$ Donc $0 < x_3 < 1$

D'où $\boxed{-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1}$

a) $\cos(3\alpha) = \mathrm{Re}(e^{i3\alpha})$

On a : $(e^{i\alpha})^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$

$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + (i\sin\alpha)^3$

$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha$

$\Rightarrow \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$

b) on a :

$\cos\left(3\times\frac{7\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{7\pi}{9}\right) = 4\cos^3\frac{7\pi}{9} - 3\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{7\pi}{9} - 3\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) - \frac{1}{2} = 0$

D'où $\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x) = 0$

$\cos\left(3\times\frac{5\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{5\pi}{9}\right) = 4\cos^3\frac{5\pi}{9} - 3\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{5\pi}{9}-3\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}=0$

D'où $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x)=0$

$\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}=0$

D'où $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x)=0$

or $\frac{\pi}{9}<\frac{5\pi}{9}<\frac{7\pi}{9}$ *et* cos *décroissante sur* $[0,\pi]$

donc : $\cos\frac{7\pi}{9}<\cos\frac{5\pi}{9}<\cos\frac{\pi}{9}$

Par la suite :

$x_1=\cos\frac{11\pi}{9}$; $x_2=\cos\frac{7\pi}{9}$; $x_3=\cos\frac{\pi}{9}$

Exercice n° 1

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-2-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+3)=5$

Donc f est. dérivable en 2 et $f'(2)=5$

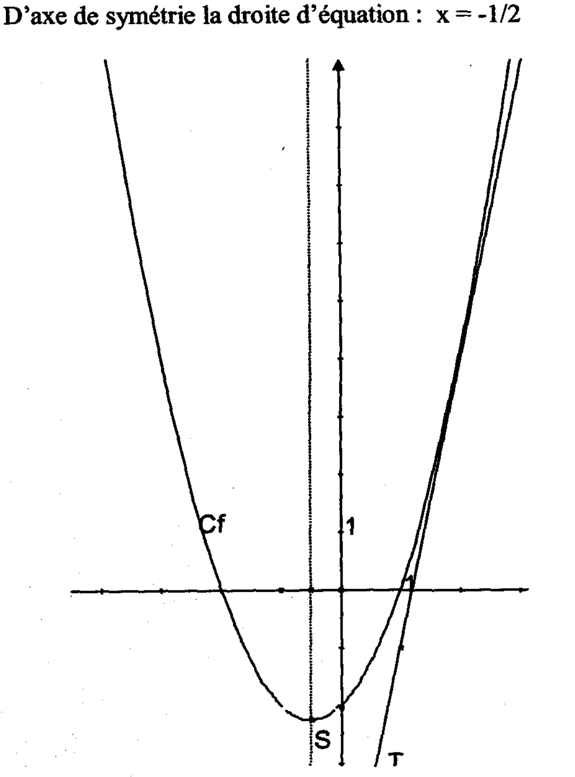
b) $T:y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$=5(x-2)+4$

$\boxed{T:y=5x-6}$

c) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{1-2-8}{4}=\dfrac{-9}{4}$

C_f est une parabole de sommet le point S($-\dfrac{1}{2};-\dfrac{9}{4}$) et D'axe de symétrie la droite d'équation : x = -1/2



d) Approximation affine de f en 2

$f(2+h)\simeq f(2)+hf'(2)\simeq 4+5h$

(h Voisin de 0)

Exercice n° 2

● $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1}=-5=f'(-1).$

⊙ $T:y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$=-5(x+1)+4$

$\boxed{y=-5x-1}$

⊙ Approximation affine en a=-1

h Voisin de 0 :

$f(-1+h)\simeq f(-1)+hf'(-1)\simeq 4-5h$.

● ⊙ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2x-3}{x+4}+\frac{1}{5}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{10x-15+x+4}{5(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{11x-11}{5(x+4)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{11(x-1)}{5(x+4)(x-1)}=\dfrac{11}{25}$

Donc $f'(1)=\dfrac{11}{25}$.

⊙ Tangente:

$T:y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=\dfrac{11}{25}(x-1)-\dfrac{1}{5}$

$\boxed{y=\dfrac{11}{25}x-\dfrac{16}{25}}$

⊙ Approximation affine en $a=1$

$f(1+h)\simeq f(1)+hf'(1)\simeq-\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{25}h$

(h Voisin de 0)

● ⊙ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-4}-2}{x-1}\times\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-4-4}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{3x^2+5x-8}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\overbrace{3(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right)}^{a+b+c=0}}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2} = \frac{11}{4}.$$

Donc f est dérivable en $x_0=1$ et $f'(1)=\frac{11}{4}$

⊙ Tangente:

$T: y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$= \frac{11}{4}x - \frac{11}{4} + 2$ $\boxed{y = \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}}$

⊙ Approximation affine de f en 1 :

$f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1) \simeq 2 + \frac{11}{4}h$ (h Voisin de 0)

Exercice n° 3

● $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to0^+}(x+1) = 1 = f_d'(0)$

$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2-x}{x}$

$= \lim_{x\to0^-} x-1 = -1 = f_g'(0)$

On a: $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ f n'est pas dérivable en $x_0=0$

la courbe (C_f) admet deux demi - tangentes

au point d'abscisse $x_0=0$ ayant pour équations

$T_1: \begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow T_1: \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

:

$T_2: \begin{cases} y = f_g'(0)(x-0)+f(0) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$

● $D_f =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

$$\lim_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

f Non dérivable à gauche de $x_0=2$

$T: \begin{cases} x = 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Demi tangente verticale dirigé vers le haut.

●

$\begin{cases} f(x) = x^2-2x+4; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}; x > 1 \end{cases}$

- Dérivabilité à droite en 1.

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{x^2+x+1}{x}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x} = 0 = f_d'(1)$$

- Dérivabilité à gauche en $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2x+4-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to1^-} x-1 = 0 = f_g'(1)$$

On a: $f_d'(1) = f_g'(1) = 0$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$

Tangente :

$T: y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$T: \boxed{y=3}$

4) • $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = f_d'(1)$$

• $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x-x^2}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x(1-x)}{x-1} = -1 = f_g'(1)$$

$f_d'(1) \neq f_g'(1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0=1$.

La courbe de f possède deux demi tangentes T_1 et T_2

$T_1:\begin{cases} y = f_g'(1)(x-1)+f(1) \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1:\begin{cases} y=-x+1 \\ x\le 1\end{cases}}$

$T_2:\begin{cases} y = f_d'(x-1)+f(1) \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2:\begin{cases} y=x-1 \\ x\ge 1\end{cases}}$

Exercice n° 4

$$\begin{cases} f(x)=4\sqrt{x+1} & x\ge 3 \\ f(x)=x^2-5x+c & x<3 \end{cases}$$

● */ Sur $]3,+\infty[$: $f(x)=4\sqrt{x+1}$ est continue sur $]3,+\infty[$ (car $x\mapsto x+1$ continue et positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est continue sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

*/ continuité en $x_0=3$:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} 4\sqrt{x+1}=8=f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-5x+c=-6+c$

Donc f est. Continue en $x_0=3$ si et seulement si $-6+c=8 \Rightarrow c=14$.

D'où pour f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\boxed{c=14}$

●

*/ Sur $]3,+\infty[$: $f(x)=4\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty,3[$ (car $x\mapsto x+1$ dérivable et strictement positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est dérivable Sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Dérivabilité en $x_0=3$:

• $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{(4\sqrt{x+1}-8)(4\sqrt{x+1}+8)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{16(x+1)-64}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{16(x+1-4)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{16(x-3)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}=1=f_g'(1)$

$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+14-8}{x-3}$

n $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=1$

clusion : $f_g'(3)=f_d'(3)=1$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $x_0=3$ et $f'(3)=1$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} f'(x)=2x-5 \text{ pour } x<3 \\ f'(3)=1 \\ f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ pour } x>3 \end{cases}$$

Exercice n° 5

● $x\mapsto x^2-1$ est continue sur IR (Fonction polynôme) donc en particulier elle est continue sur $]-\infty,1]$.

$x\mapsto\sqrt{x}-1$ est continue pour $x\ge 0$ en particulier elle est continue sur $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}-1=0=f(1)$

D'où f est continue en $x_0=1$ et par la suite sur IR

● a) */ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2=f_g'(1)$

*/ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}=f_d'(1)$

Conclusion :

$f_g'(1)\ne f_d'(1)\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0=1$.

b) Interprétation géométrique :

Au point d'abscisse $x_0=1, C_f$ admet Deux demi tangentes d'équations :

$T_1\begin{cases} y=2x-2 \\ x\le 1\end{cases}$ $\quad T_2\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ x\ge 1\end{cases}$

Exercice n° 6

a) on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \cos\pi x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\cos\pi x$
Pour $x > 0$ on aura:

$$0 \le \frac{1-\cos\pi x}{x} \le \frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3 \le 3+\frac{1-\cos\pi x}{x} \le 3+\frac{2}{x}$$

Donc $\forall x > 0$: $3 \le f(x) \le 3+\frac{2}{x}$

b) Appliquant le théorème de comparaison:

On a: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}+3 = 3$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

*/ $\lim_{x\to(-1)^-} 2x+\sqrt{x^2-1} = -2 = f(-1)$

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 2x^3-3x^2+3$
$= -2 = f(-1)$

f Continue à droite et à gauche en

$x_0 = -1$ D'où f est continue en $x_0 = -1$.

*/ $\lim_{x\to0^-} f(x) = 3 = f(0)$

$\boxed{\lim_{\alpha\to0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0}$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 3+\frac{1-\cos\pi x}{\pi x}\times\pi$
$= 3+0 = 3 = f(0)$

Donc f continue en 0.

Dérivabilité de f a gauche en $x_0 = -1$:

$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{2x+\sqrt{x^2-1}+2}{x+1}$

$= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{2x+2}{x+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

$= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$

$= \lim_{x\to(-1)^-} 2+\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)} = 2+\frac{-2}{0^+} = -\infty.$

f n'est dérivable a gauche en $x_0 = -1$.

C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $x_0 = -1$.

Dérivabilité a gauche on 0:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{2x^3-3x^2+3-3}{x} = \lim_{x\to0^-} 2x^2-3x = 0 = f_g'(0)$$

Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3+\frac{1-\cos\pi x}{x}-3}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos\pi x}{x^2} = \frac{\pi^2}{2} = f_d'(0)$$

Car : $\boxed{\lim_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}}$

$f_g'(0) \ne f_d'(0)$: f non dérivable en $x_0 = 0$.

Exercice n° 7

a/ $\lim_{x\to0} \frac{2\sin x+1-\cos x}{x}$

$= \lim_{x\to0} 2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0} = 2 \ne f(0) = 1$

f n'est pas continue en 0.

b/ f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas Dérivable en 0

Exercice n° 8

a/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x$.

b/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x$.

c/ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

d/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2-10x+7$

e/ f est dérivable pour tout x vérifiant : $x^2+x-2 \ne 0$.

Donc f *est* dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ et

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-4-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}.$$

g/ f est dérivable pour $4x-1 > 0$

Donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

et $f'(x) = \frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$

h/ f est dérivable pour $1-\cos x \neq 0$

Donc pour $\cos x \neq 1$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et on a:

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(1-\cos x)-\sin x\,(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x-1}.$$

Exercice n° 9

● $D_f=\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x.x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

et $f'(x)=4\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)'\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$

$$=4\left(\frac{-5}{(2x+1)}\right)\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-20(x+3)^3}{(2x+1)^4}}$$

● On a: $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ pour: $x\in]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[=J$

D'où f est définie sur J.

f est dérivable pour tout x tel que : $\frac{x+1}{x-1}>0$

Donc est dérivable sur $J\setminus\{-1\}$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$
$$=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}=\boxed{-\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}}$$

● f est définie et dérivable pour $2\cos x-1\neq 0$

Or on a : $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

D'où : f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

et on a :

$$f'(x)=\frac{\cos x.(2\cos x-1)+2\sin x.(\sin x-1)}{(2\cos x-1)^2}$$
$$=\frac{2\cos^2 x-\cos x+2\sin^2-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\cos x-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

● f est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

et elle est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

et on a : $f'(x)=(\sqrt{x^2-1})'.(-\sin(\sqrt{x^2-1}))$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.\sin\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

● On a pour $x\neq 0$: $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$

$$\Leftrightarrow -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\underset{pour\,x>0}{\Leftrightarrow}\ -x\leq\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

$$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\underset{pour\,x<0}{\Leftrightarrow}\ x\leq\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable a gauche en 0 et $f_g'(0)=0$

et par suite est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=2x.\sin\frac{1}{x}+x^2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad pour\ x\neq 0$$

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad pour\ x\neq 0$$
$$f'(0)=0$$

Exercice n° 10

● $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	-1	↗ 1

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

● f admet un minimum globale -1 pour la valeur 0.

● $f(]-\infty,0])=[-1,1[$

$f([0,+\infty[)=[-1,1[$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{-1\leq f(x)\leq 1}$ donc f est bornée

Exercice n° 11

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) $x\mapsto 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$1+\sqrt{x}\neq 0;\forall x>0$ D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$

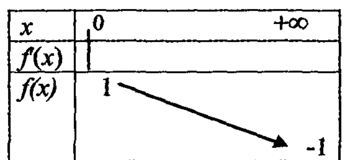
$$f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},\forall x>0$$

b) $f'(x)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t}{1+t}=-1$$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	
$f(x)$	1 ↘	-1

Exercice n° 12

$f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

● L'équation $f(x)=x$ est équivalente à $f(x)-x=0$

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a: $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x$ est continue sur $]1,+\infty[$

Et on a : $g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0$

g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur

$\left]\lim_{x\to+\infty}g,\lim_{x\to 1^+}g\right[=]-\infty,1[=J$

Comme $0\in J$ l'équation $g(x)=0$ Par suite $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1,+\infty[$.

● $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\sqrt{x}\neq 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

et pour tout réel $x\in]1,+\infty[$.

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Or $x>1\Rightarrow x\sqrt{x}\geq 1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0\leq\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2},\forall x>1.$

● f est continue sur $]1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$

et $\forall t\geq 1:|f'(t)|\leq\dfrac{1}{2}$

$x>1;\alpha>1$ D'après l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$

Comme $f(\alpha)=\alpha$ on aura : $|f(x)-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

Exercice n° 13

Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

● f est définie lorsque $\dfrac{x}{x-1}\geq 0$ *et* $x-1\neq 0$

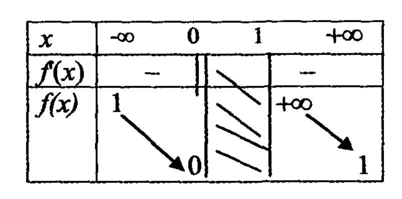
$\Rightarrow D_f=]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

● f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}<0;\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

Tableau des variations:



x	$-\infty$ $\quad$ 0	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	1 ↘ 0	$+\infty$ ↘ 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{1}=1\ ;\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

● **erreur** : $g(x)=f(\sin x),\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$x\mapsto\sin x$ est dérivable sur

$\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

Or f n'est pas définie sur $]0,1]$

Donc g n'est pas définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (impossible).

Exercice n° 14

$f(x)=\cos^2 x,x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

● a) $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos^2 x$ est Dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$f'(x)=2(-\sin x)\cos x=-2(\sin x).\cos x$

$\boxed{f'(x)=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x},x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

b) On a: $\cos x>0$ et $\sin x>0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[:f'(x)<0$

T.V:

x	0 $\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 ↘ 0

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0$

g continue et strictement décroissante donc g est une Bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},1\right[$

Comme $0\in\left]-\frac{\pi}{2},1\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) */ si $x\leq\alpha\Leftrightarrow g(x)\geq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

. */ $x\geq\alpha\Leftrightarrow g(x)\leq g(\alpha)\ \Leftrightarrow g(x)\leq 0.$

(Car g est décroissante)

c) $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}<0$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{6}>0$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right).g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$ Donc $\boxed{\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{6}}$.

d) Position de C_f et Δ :

x	0 $\quad$ α	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)-x$	+ $\quad$ 0	$-$
position	(C) au Dessus de D	(C) au dessous de D

(C) coupe D

Exercice n° 15

● $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}2-\sqrt{x^2-x}=2=f(0)$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=2=f(0)$

f Continue a gauche et à droite

Donc f est continue en $x_0 = 0$.

●/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-\sqrt{x^2-x}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-(x^2-x)}{x\times\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow f$ non dérivable à gauche en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1-(1+x^2))}{x\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

Conclusion: f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0

● Pour $x \in]0,+\infty[$ $f(x) = 1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) = -\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) < 0 \quad pour\ x > 0$

● Pour $x < 0$: $f(x) = 2-\sqrt{x^2-x}$

$f'(x) = 0 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$

$f'(x) > 0 \quad pour\ x < 0$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ (avec $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \searrow 0$)

● Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour abscisses les solutions de $f(x) = 0$.

•pour $x < 0$:

$2-\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = 2$

$\Leftrightarrow x^2-x = 4 \Leftrightarrow x^2-x-4 = 0$

$\Delta = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x' = \frac{1+5}{2}$ ou $x'' = \frac{1-5}{2} = -2$

$x' = 3 > 0$ (à Rejeté) ou $\boxed{x'' = -2}$

• Pour $x > 0$:

$1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -1$. Impossible

Donc $(C_f)\cap(xx') = \{A(-2,0)\}$

●a) $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x)-x = 0$

Sur $]0,+\infty[$:

$g'(x) = f'(x)-1 < 0$ car $f'(x) < 0$

D'où g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et $g(]0,+\infty[) =]-\infty,2[$.

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 1-\infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)-x = 2-0 = 2$)

Comme $0 \in]-\infty,2[$ l'équation $g(x) = 0$

et par suite $f(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$

une unique solution α

b) $g(1,5) = f(1,5)-1,5 \simeq 0,05$

$g(1,6) = f(1,6)-1,6 \simeq -0,07$

$g(1,5)\times g(1,6) < 0 \Rightarrow 1,5 < \alpha < 1,6$

● */on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$

est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{x^2-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\left(-\frac{2}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x}-x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\dfrac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}$

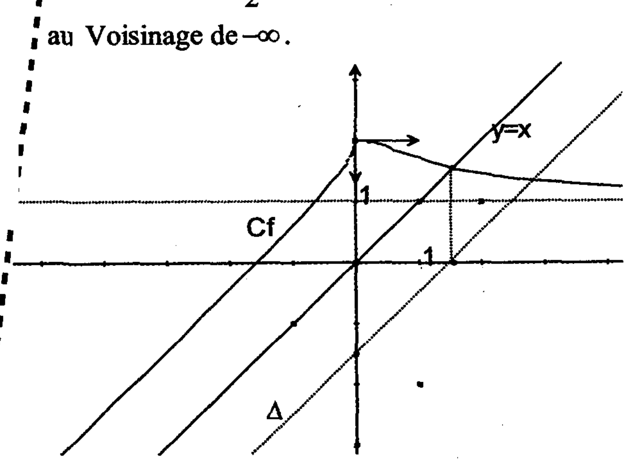
$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$

$= 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

Conclusion.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x = -\dfrac{3}{2}$

Donc: $\Delta: y=x-\dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de $-\infty$.



8) a) $h(x)=f(\operatorname{tg}x)$

On a: $tg\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$

Donc $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[: tgx\in[0,+\infty[$

$h'(x)=(tgx)'f'(tgx)$ (fonction composée)

$= \cancel{(1+tg^2x)}\dfrac{-tgx}{\cancel{(1+tg^2x)}\left(\sqrt{1+tg^2x}\right)}$

$\boxed{h'(x)=\dfrac{-tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) $h(x)=f(tgx)=1+\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$

Or. $1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$, d'où $\sqrt{1+tg^2x}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2x}}$

$=\dfrac{1}{|\cos x|}=\dfrac{1}{\cos x}$ (car $\cos x>0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$)

Donc $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=1+\dfrac{1}{\frac{1}{\cos x}}$

$\Leftrightarrow \boxed{h(x)=1+\cos x}, \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice n° 16

$g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

● a) $x\mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto x^2+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $x^2+3>0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+3}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$$

$$g'(x)=\frac{2(x^2+3)-2x^2}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}=\frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}}$$

b) $g'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

T.V:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	-3 ↗	0	↗ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1 \underset{|x|=-x}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$

$\underset{|x|=x}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=1$

c) $g(1)=\dfrac{2}{\sqrt{4}}-1=1-1=0$

Si $x\geq1$ alors $g(x)\geq g(1)=0$

Si $x \le 1$ alors $g(x) \le g(1) = 0$

x	-∞	1	+∞
g(x)	-	0	+

● $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$

a) $x^2+3>0$: f est dérivable sur ℝ et on a :

$$f'(x) = 2\times\frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 = g(x)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

T.V:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{3+x^2} - x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{2\sqrt{\frac{3}{x^2}+1} - 1}_{1}\right) = +\infty$$

b) $T : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$= -2(x+1)+5 \Rightarrow \boxed{y = -2x+3}$

Exercice n° 17

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

1) a) signe de x^2+x

x	$+\infty$	-1		0	$+\infty$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

*/ Dérivabilité à gauche en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-(x^2+x)+1}{-x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{-x^2-x+1+x-1}{x(-x+1)} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{-x+1} = 0 = f'_g(0)$$

*/ Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x+1-x-1}{x(x+1)} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+1} = 0 = f'_d(0)$$

Conclusion:

$f'_g(0) = f'_d(0)$ Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

*/ Dérivabilité à gauche en -1 :

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1}-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{2(x^2+x+1)+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x^2+3x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{2(-x+1)} = -\frac{1}{4} = f'_g(-1)$$

*/ Dérivabilité à droite en -1 :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x^2-2x+2+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x^2-x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x+1}{2(-x+1)} = \frac{3}{4} = f'_d(-1)$$

Conclusion:

$f'_g(-1) \ne f'_d(-1)$ donc f non dérivable en $x_0 = -1$.

b) Au point d'abscisse 0, C_f admet une tangente horizontale. $y = 0$

Au point d'abscisse $x_0 = -1$, C_f admet deux demi -tangentes de coefficients directeurs respectives $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

2) Expression de $f(x)$ sans valeur absolue:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{-x+1}, x\leq -1 \\ f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{-x+1}, x\in[-1,0] \\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}, x\geq 0 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2}, x\leq -1 \\ f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(-x+1)^2}, x\in]-1,0[\\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}, x\geq 0 \end{cases}$$

On a:

$-x^2+2x+1=0, \Delta'=2$

$x'=1-\sqrt{2}\notin]-\infty,-1[$ et $x''=1+\sqrt{2}\notin]-\infty,-1[$

Donc:

x	$+\infty$	x'		x''	$+\infty$
$-x^2+2x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow f'(x)<0 \quad sur\ ]-\infty;-1[$

On a aussi: $x^2-2x>0$ pour $x\in]-1,0[$

et $x^2+2x\geq 0$ pour $x\in[0,+\infty[$.

T.V :

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↗		$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}=+\infty$$

<u>Branches infinies</u>:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Donc $\Delta: y=x$ est une asymptote à C_f au $V_{+\infty}$.

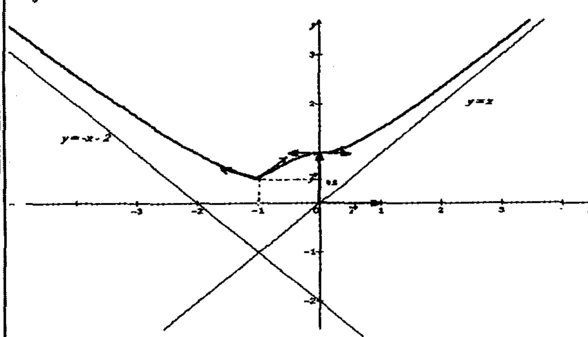
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x(-x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x^2+x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-x+1}=-2$$

Donc $\Delta': y=-x-2$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de - ∞.



Exercice n° 1

a) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

Donc f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Par la suite f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [1, +\infty[= J$

b) • $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

• $f^{-1}(2) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 1$
$\Leftrightarrow x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$ comme $x_0 \in [0, +\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(2) = 1}$

• $f^{-1}(3) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 2$
$\Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2}$ ou $x_0 = -\sqrt{2}$ comme $x_0 \in [0, +\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(3) = \sqrt{2}}$

c) • f et f^{-1} ont même sens de variation donc f^{-1} est strictement croissante sur J

• f est dérivable sur $[0, +\infty[$

et $f'(x) = 2x \neq 0 \ \forall x > 0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$

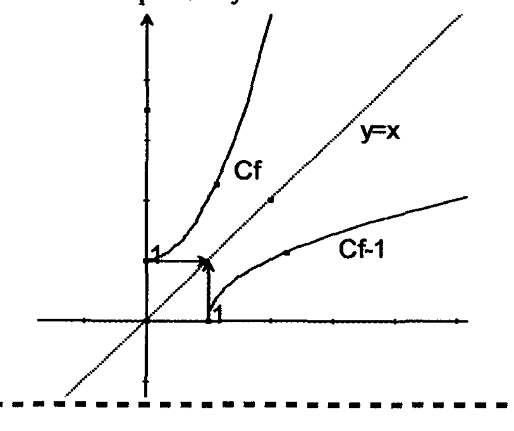
d) $x \in J$, $y \in [0, +\infty[$:

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y :

$y^2 + 1 = x \Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x-1}$ ou bien

$y = -\sqrt{x-1}$, or $y \geq 0$ d'où $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}}$

e) Cf La courbe de f est une demi-parabole admettant une demi tgte horizontale à droite au sommet S(0,1).
La courbe de f^{-1} est le symétrique de Cf par rapport à la droite d'équation : y=x



Exercice n° 2

$x \in [0, +\infty[$; $g(x) = -1 + \sqrt{x}$

a) pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
Donc g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) $g([0, +\infty[) = [g(0), \lim_{+\infty} g[= [-1, +\infty[$

Donc g^{-1} est définie sur $J = [-1, +\infty[$

c) $x \in [-1, +\infty[$, $y \in [0, +\infty[$:

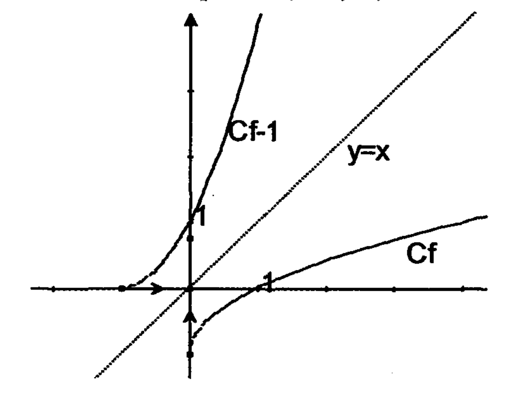
$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y :

$-1 + \sqrt{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{y} = x + 1$

$\Leftrightarrow y = (1 + x)^2$

alors $\boxed{g^{-1}(x) = (1 + x)^2}$

d) Cg La courbe de g est une demi-parabole admettant une demi tgte verticale au point S(0,-1).
La courbe de f^{1} est le symétrique de Cg par rapport à la droite d'équation : y=x (Cf^{1} admet une demi- tg horizontale à droite au point S'(-1 ;0))



Remarque : g dérivable sur $]0, +\infty[$
g^{-1} dérivable sur $[-1, +\infty[$ et $(g_d^{-1})'(-1) = 0$

Exercice n° 3

● $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0$

Donc h est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$
Par la suite h admet une fonction réciproque h^{-1}

définie sur $J = h(]0, +\infty[)$
$= \left]\lim_{0^+} h, \lim_{+\infty} h\right[= \mathbb{R}$

● $x \in IR$, $y \in]0,+\infty[$:

$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$, cherchons y :

$y - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y.x - 1 = 0$

Résolution de l'équation : $y^2 - y.x - 1 = 0$

On a : $\Delta = x^2 + 4 > 0$

D'où

$\Leftrightarrow y = y_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ou bien $y = y_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$

Comme $h(1) = 0$ on aura $h^{-1}(0) = 1$,

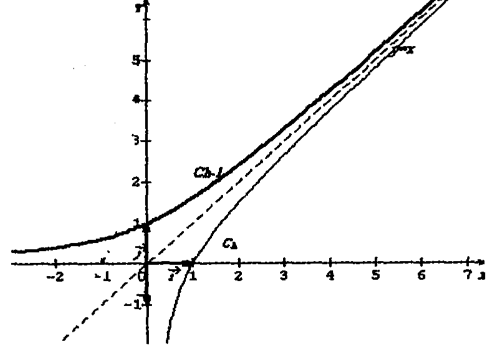
En remplacent x par 0 dans les expressions de y_1 et y_2 on trouve $y_1 = 1$

Ce qui prouve que : $\boxed{h^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}}$

● $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Il résulte que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à C_h



Exercice n° 4

$f(x) = \text{tg}(x)$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x > 0$

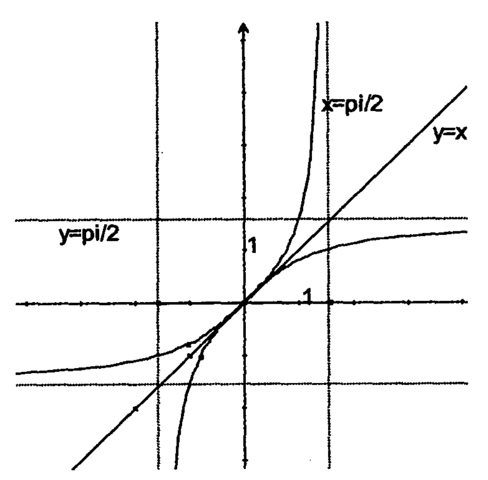
f continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc f est bijective

● $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Donc les droites : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont deux asymptotes pour la courbe de f



Exercice n° 5

$f(x) = \frac{-1+2x}{6+3x}$

a) f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{15}{(6+3x)^2} > 0$ $\quad \boxed{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$

f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$

b) f est continue et strictement croissante sur $]-2,+\infty[$ d'où f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur l'intervalle

$I = f(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{x\to(-2)^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$= \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$

c) $x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$, $y \in]-2,+\infty[$

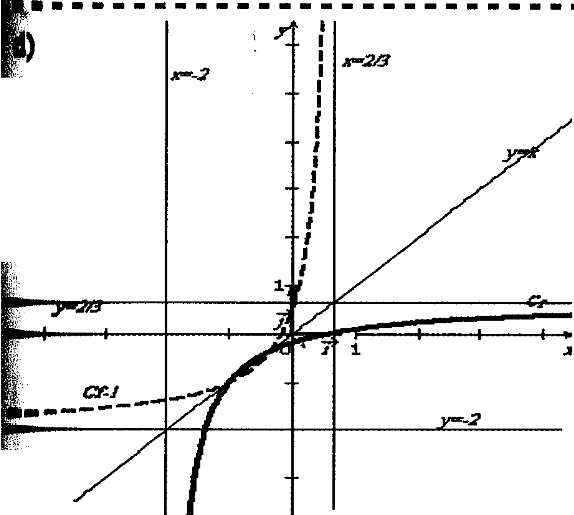
$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y :

$\frac{-1+2y}{6+3y} = x \Leftrightarrow 2y - 3xy = 1 + 6x$

$\Leftrightarrow y(2-3x) = 1 + 6x \Leftrightarrow y = \frac{1+6x}{2-3x}$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1+6x}{2-3x}}$

d)



Exercice n° 6

$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1) a) $x \to x^2$ est dérivable sur IR

$x \to 1+x^2$ est dérivable sur IR: et $1+x^2 > 0$

Donc f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x\,x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in$ IR

b) Tableau des variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

2) a) g est continue et strictement croissante sur] 0 , +∞ [d'où g réalise une bijection de] 0 , +∞ [sur g(] 0 , +∞ [)=]0, 1[=J

b)) $x \in$]0, 1[, y ∈] 0 , +∞ [

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y :

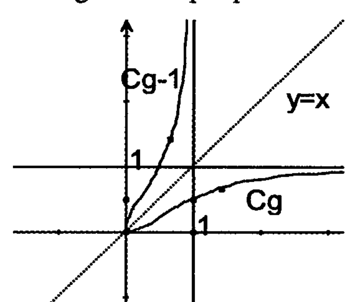
$$\frac{y^2}{1+y^2} = x \Leftrightarrow y^2 = (1+y^2).x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x + x.y^2 .$$

$\Leftrightarrow y^2(1-x) = x \Leftrightarrow y^2 = \frac{x}{1-x}$ comme y > 0

Alors $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

c) Courbe de g et sa réciproque



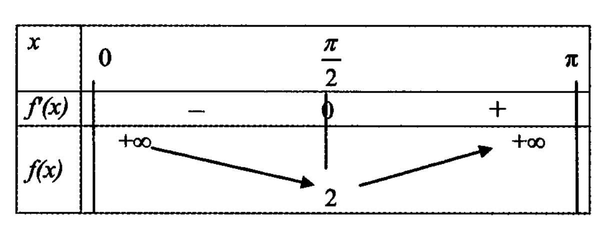
Exercice n° 7

$f(x) = \frac{2}{\sin x}$, $x \in]0, \pi[$

a) f est dérivable sur $]0, \pi[$ car sin(x) ≠ 0 et on a

$f'(x) = -\frac{2\cos x}{(\sin x)^2}$, le signe de $f'(x)$ est le contraire de celui de cos(x)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ et $\lim_{x \to \pi^-} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

2) g restriction de f à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur g($\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)=]2, +∞[donc g admet une fonction réciproque définie sur]2, +∞[

b) On a : * $g(0)=2$ d'où $g^{-1}(2)=0$

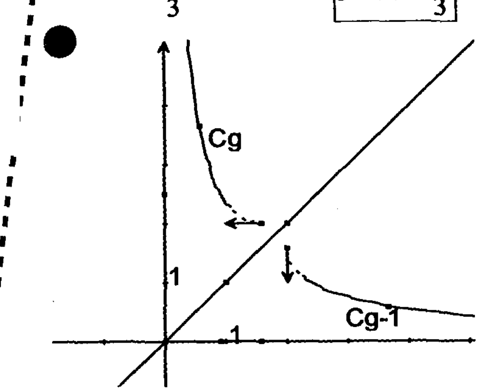
* posons $g^{-1}(4)=\alpha$ donc on aura $g(\alpha)=4$

C'est-à-dire $\frac{2}{\sin\alpha}=4$ ce qui donne

$\sin\alpha=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

Donc $\alpha=\frac{\pi}{3}$ finalement $\boxed{g^{-1}(4)=\frac{\pi}{3}}$

●



Exercice n° 8

$f(x)=x^5, x \in [0,+\infty[$

a) $f'(x)=5x^4>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

f est continue et strictement croissante sur IR_+

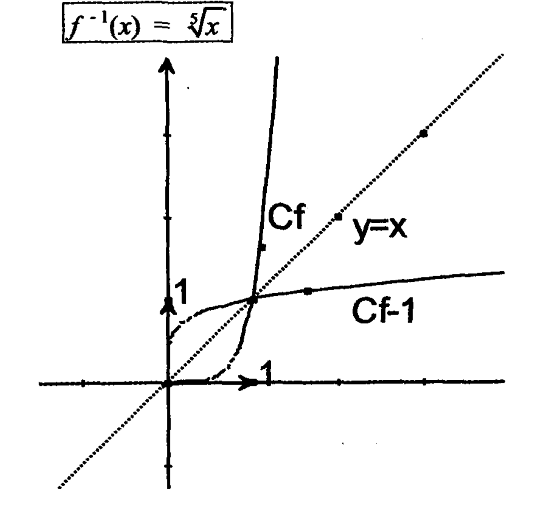
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie

sur $f([0,+\infty[)=[f(0),\lim\limits_{+\infty}f[=[0,+\infty[$

- Expression de $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow y^5=x \Leftrightarrow y=\sqrt[5]{x}$

$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}}$



Exercice n° 9

$g(x)=2\sqrt[3]{x}+1$

a) pour $x>0$ on a $\sqrt[3]{x}$ est dérivable donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

On sait que : $(\sqrt[n]{x})'=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx},\ x\succ 0$

(Voir Activité 3 p 69)

Donc $\forall x\succ 0: g'(x)=2.\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

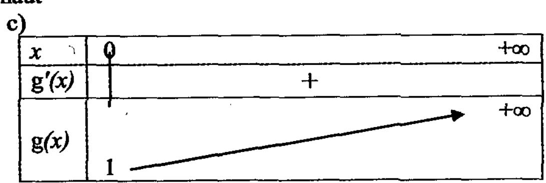
b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[3]{x}+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}2.\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty$ $\boxed{\sqrt[n]{x^n}=x}$

D'ou $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=+\infty$, par la suite g est non dérivable à droite en 0 et la courbe de g admet au point d'abscisse 0 une demi- tangente verticale dirigée vers le haut

c)



x	0		$+\infty$
$g'(x)$	|	+	
$g(x)$	1	↗	$+\infty$

d) g étant continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

e) $x\geq 1$ et $y\geq 0$:

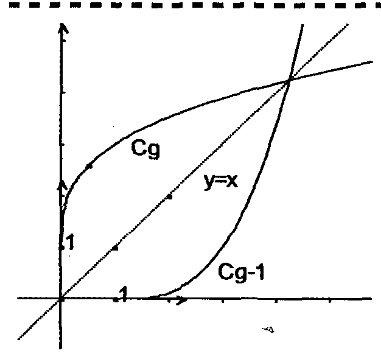
$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y}+1=x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y}=\frac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{y})^3=(\frac{x-1}{2})^3 \Leftrightarrow y=(\frac{x-1}{2})^3$

D'où $\boxed{g^{-1}(x)=(\frac{x-1}{2})^3}$

f) courbe de g et g^{-1}



Exercice n° 10

● a) $x \to 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \to 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $1+\sqrt{x} \neq 0 \quad \forall x \succ 0$: donc f est dérivable

sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'.(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^2}$$

b)

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	|| –
$f(x)$	1 ↘ – 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}=-1$$

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ d'où elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=]-1,1]$

d) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}$

$=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3}$ donc $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

e) • $f(4)=\frac{1-\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

• $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=\frac{1}{f'\left[(f^{-1})(-\frac{1}{3})\right]}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{-\frac{1}{18}}$

$=-18$

D'où $\boxed{(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=-18.}$

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0, \ \forall x \geq 0$

g étant continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]$

Or : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=-1-\infty=-\infty$

Et $g(0)=f(0)-0=1$

Donc $g([0,+\infty[)=]-\infty,1]$

Coclusion : g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$ et on a $0 \in]-\infty,1]$ il résulte que 0 admet un unique antécédent α par g dans $[0,+\infty[$

c) $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(1)=f(1)-1=-1 \end{cases} \Rightarrow g(0).g(1)\prec 0$

Conclusion : $0<\alpha<1$

Exercice n° 11

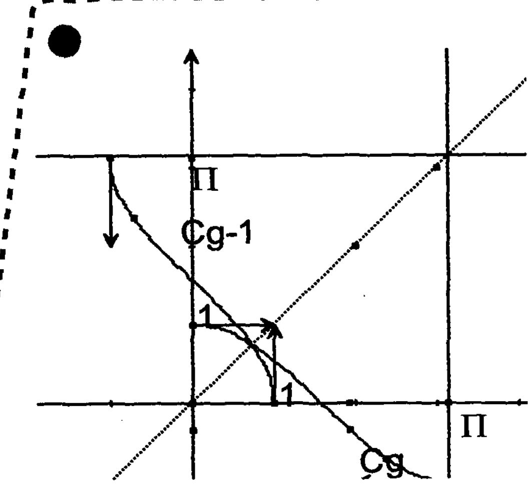
● $g'(x)=-\sin(x)<0 \ \forall x \in]0,\pi[\Rightarrow$ g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc g est une bijection de $[0,\pi]$ sur $g([0,\pi])=[-1,1]$.

●* $g^{-1}(0)=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0 \Leftrightarrow \cos x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{g^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}}$

*De même on a : $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ d'où $\boxed{g^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}}$

●



● $x \in [-1, 1]$

a) $\cos[g^{-1}(x)] = g(g^{-1}(x)) = x$

$\sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1-\cos^2(g^{-1}(x))} = \sqrt{1-x^2}$

b) On sait que : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ d'où

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -\cos(g^{-1}(x))$$

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g^{-1}[\cos(\pi - g^{-1}(x))] = g^{-1}(-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{g^{-1}og}_{Id}\,(\pi - g^{-1}(x)) = g^{-1}(-x)$$

Finalement : $\boxed{\pi - g^{-1}(x) = g^{-1}(-x)}$

Exercice n° 12

$f(x) = 2x - \sin x$, $x \in IR$

● f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ car $\cos x \le 1$ donc f strictement croissante sur IR

* f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur f(IR)

Or on sait que $\forall x \in IR$: $-1 \le \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \le -\sin x \le 1 \Leftrightarrow -1 + 2x \le 2x - \sin x \le 1 + 2x$

Utilisant le théorème de comparaison :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

D'où $f(IR) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= IR$

● a) f est une bijection de IR sur IR, $4 \in IR$ donc l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR

b) $f(2,2) = 3,59 < 4$ et $f(2,4) = 4,12 > 4$

Donc $\boxed{2,2 \le \alpha \le 2,4}$

● $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

a) $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}\sin\alpha$ (*)

On sait que $f(\alpha) = 4$ donc $2\alpha - \sin\alpha = 4$ et par la suite

$\sin\alpha = 2\alpha - 4$

Remplacent cette expression de $\sin\alpha$ dans l'égalité (*)

On aura : $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}(2\alpha - 4) = 2 + \alpha - 2 = \alpha$

D'où $\boxed{g(\alpha) = \alpha}$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Or : $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos x \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x\right| \le \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in IR$, $\boxed{|g'(x)| \le \frac{1}{2}}$

c) g est dérivable sur IR , $x \in IR$, $\alpha \in IR$ et $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |g(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice n° 13

● f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})' = 0 + \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x) < 0$: f étant continue et strictement

décroissante sur $]1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $J=f(]1,+\infty[)=]1,2[$

● $x \in]1,2[$, $y \in]1,+\infty[$

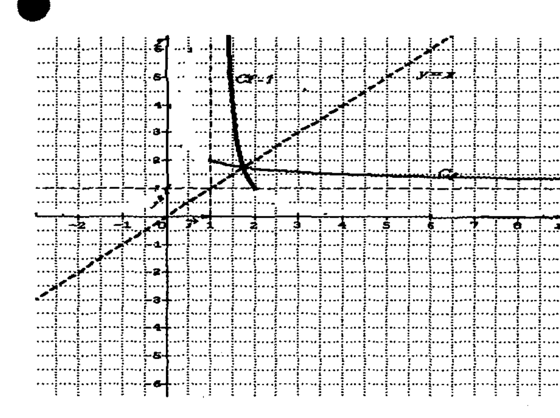
$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=1+\frac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

Conclusion : $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{(x-1)^2}}$; $x \in]1,2[$

●



● Posons $g(x)=f(x)-x$

$\forall x>1$: $g'(x)=f'(x)-1<0$ car $f'(x)<0$

Donc g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et $g(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

Comme $0 \in]-\infty,1[$ alors l'équation $g(x)=0$ (et par la suite l'équation $f(x)=x$) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,+\infty[$

● $\forall x \geq 1$ on a : $2x\sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

D'où $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \geq -\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

Finalement : $\forall x \geq 1$ on a $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

● f est dérivable sur $]1,+\infty[$, $x \in]1,+\infty[$

$\alpha \in]1,+\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

On a aussi : $f(\alpha)=\alpha$ d'où $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice n° 14

$x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$; $f(x)=2-\sqrt{-2x+1}$

● a) La fonction : $x \mapsto -2x+1$ est dérivable est strictement positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

Donc f est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ (Rque : f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$)

$$f'(x)=0-\frac{(-2x+1)'}{2\sqrt{-2x+1}}=-\frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}>0$$

Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+	||
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

b) f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

Sur $J=f\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\right)=]-\infty,2]$

● $y \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $x \in]-\infty,2]$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=2-\sqrt{-2y+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{-2y+1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow -2y+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow y=\frac{1-(2-x)^2}{2}$$

$$=\frac{1-(4-4x+x^2)}{2}$$

<u>Conclusion</u> : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$

● on a $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$ donc f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;2]$ (fonction polynôme)

<u>Conclusion</u> : f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$

● $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(1)]}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1$

(Rque : On peut aussi calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)=-x+2$)

Exercice n° 15

● • a) h est définie si et seulement si

$|x| - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ *ou* $x \neq -1$

Donc : $Dh = IR \setminus \{-1,1\}$

• pour tt $x \in Dh$, *on a* $-x \in Dh$ et :

$$h(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -h(x)$$

D'où h est une fonction impaire ce qui prouve que l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de la fonction h.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ (Pour $x > 0$ on a $|x| = x$)

Donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale pour la courbe de h au voisinage de + ∞

• $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=x>0} - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale pour la courbe de h

**Par raison de symétrie les droites d'équations x = –1 y = – 1 sont deux asymptotes à C_h

● Etudions h sur $D_E = D_h \cap [\,0, +\infty\,[$

$$D_E = [\,0, 1\,[\cup]\,1, +\infty\,[$$

On a pour tout $x \in D_E$: $h(x) = \frac{x}{x-1}$ car $|x| = x$

h est dérivable sur D_E et $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	0	1		$+\infty$
$h'(x)$		‖		
$h(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

● $g(x) = h(x)$ pour $x \in]\,0, 1[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur] 0, 1[

donc g réalise une bijection de] 0, 1[sur J=]–∞, O[

b) $y \in]\,0, 1\,[$, $x \in]-\infty, 0[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y

$$g(y) = \frac{y}{y-1} = x \Leftrightarrow y = xy - x$$

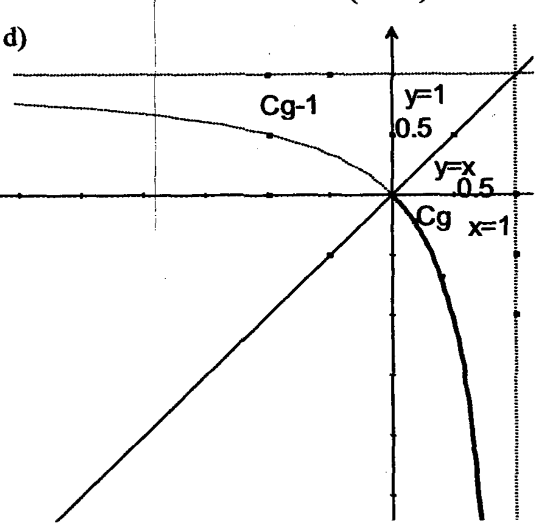
$$\Leftrightarrow y(x-1) = x \quad \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}.$$

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{x-1}\,; x \in]-\infty; 0\,[}$

c) g est dérivable et $g'(x) \neq 0$ sur] 0, 1 [donc g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et on a

$$(g^{-1})'(x) = g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

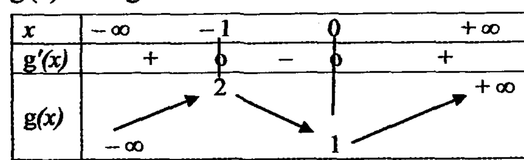
d)



Exercice n° 16

● a) g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

$g'(x) = 0$ signifie x = 0 ou x = – 1



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

b) • g est continue et strictement croissante sur [0, +∞[et g([0, +∞[ ) = [1, +∞[

Comme 0 ∉ [1, +∞[alors l'équation

g (x) = 0 n'admet pas des solutions dans [0, +∞ [

De même l'équation g (x) = 0 n'admet pas des solutions Dans l'intervalle [– 1 , 0]

- g est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $g(]-\infty,-1[) =]-\infty,2[$

Comme $0 \in]-\infty,2[$ alors l'équation

$g(x) = 0$ admet

une solution unique α dans $]-\infty,-1[$

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR

- $g(-1,7) \simeq -0,156$ et $g(-1,6) \simeq 0,488$

$g(-1,7) \times g(-1,6) < 0$ donc : $\boxed{-1,7 < \alpha < -1,6}$

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

2) a) $x \in IR\setminus\{1\}$; $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x^3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{1-x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^3} = 0$$

Comme :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x^3$		$+$	0	$-$	

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1+x}{1-x^3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1+x}{1-x^3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

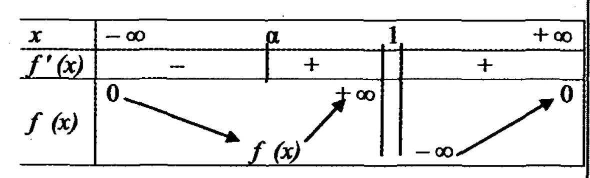
Interprétation : les droites $y = 0$ et $x = 1$ sont deux asymptotes pour la courbe de f

b) $f'(x) = \dfrac{(1+x)'(1-x^3)-(1+x)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}$

$$f'(x) = \frac{1-x^3-(1+x).(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x^3+3x^2+1}{(1-x^3)^2}$$

Donc $\forall\, x \in IR\setminus\{1\}$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

c) Le signe de $f'(x)$ et celui de $g(x)$ (voir 2 – a)



x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	||	$+$	
$f(x)$	0	↘ $f(x)$ ↗		$+\infty$	|| $-\infty$	↗	0

- h la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$

a) h est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

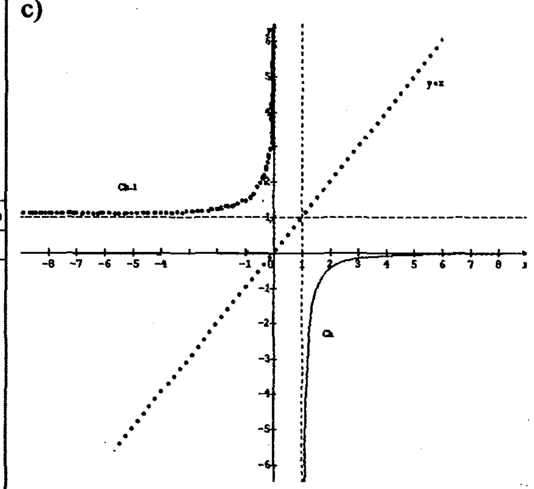
d'où h réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,0[$

b) $h(2) = \dfrac{3}{1-8} = -\dfrac{3}{7}$

- $(h^{-1})'(-\frac{3}{7}) = \dfrac{1}{h'\left[(h^{-1})(-\frac{3}{7})\right]} = \dfrac{1}{h'(2)} = \dfrac{1}{\frac{29}{(-7)^2}}$

D'où $\boxed{(h^{-1})'(-\frac{3}{7}) = \frac{49}{29}}$

c)



Exercice n° 17

$\forall\ x \in [-1,0]$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$

a) $\forall\ x \in [-1,0]$, $g'(x) = 6x^2 - 6x \succ 0$

x	-1	0
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-2 ↗	3

b) g est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$

d'où g réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $[-2,3]$

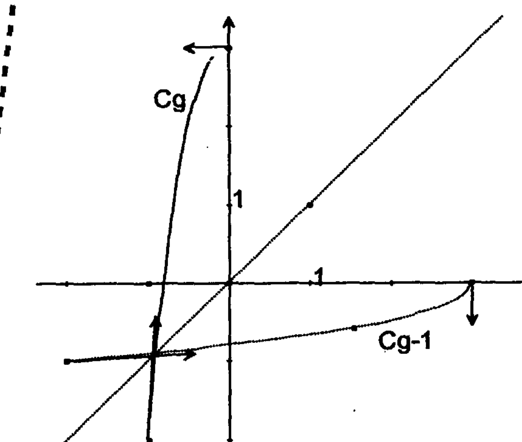
donc admet une fonction réciproque définie sur[-2,3].

c) $g(]-1,0[) =]-2,3[$, comme $0 \in]-2,3[$ et g est

une bijection alors L'équation g (x) = 0 admet une unique solution $x_0 \in]-1,0[$

d) $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'\left[(g^{-1})(0)\right]}=\dfrac{1}{g'(x_0)}=\dfrac{1}{6x_0^2-6x_0}$

e)



Exercice n° 18

● $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (à rectefier)

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{x}{1-x}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

D'après le tableau de signe : Df = [0 , 1[

f est dérivable sur] 0 , 1[et on a :

$$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}=\dfrac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}>0$$

• T de variation de f

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\sqrt{\dfrac{1}{0^+}}=+\infty$$

● a) f est continue et strictement croissante sur [0 , 1[

d'où f réalise une bijection de[0 , 1[sur [0 , +∞ [

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur [0 , +∞ [

b) • $(f^{-1})(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}=1 \Leftrightarrow 2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}}$

• $(f^{-1})(2)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}=2 \Leftrightarrow 5\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{4}{5}$ donc $\boxed{(f^{-1})(2)=\dfrac{4}{5}}$

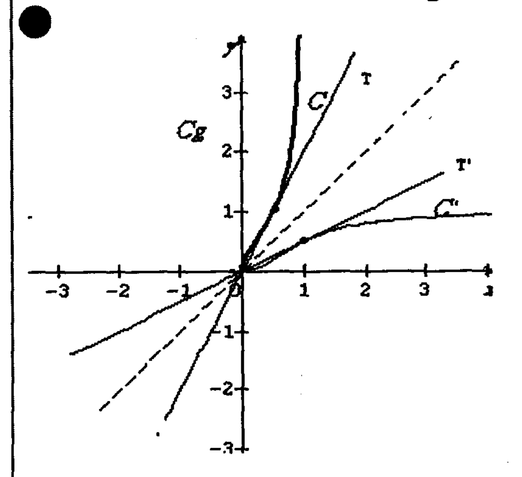
c) * On a $(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(\dfrac{1}{2})\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(1)\right]}=\dfrac{1}{f'(\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{2}$

* On a $(f^{-1})(2)=\dfrac{4}{5}$ et $f'(\dfrac{4}{5})\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(2)\right]}=\dfrac{1}{f'(\frac{4}{5})}=\dfrac{4}{25}$

d) T : $y=f'(0.5)(x-0.5)+f(0.5)=2x$

e) T' : $y=(f^{-1})'(1)(x-1)+(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}x$

●



4) $y\in[0,1[$, $x\in[0,+\infty[$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$f(y)=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}=x \Leftrightarrow \dfrac{y}{1-y}=x^2$

$\Leftrightarrow y=x^2-yx^2 \Leftrightarrow y(1+x^2)=x^2$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

Conclusion : $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in[0,+\infty[$

5) • posons u(x) = sin x

$x\to\sin x=U(x)$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$U\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

$x\to f(x)$ est dérivable sur $U\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

Donc g(x) est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

• $g'(x)=(f\circ U(x))'=U'(x)\cdot f'(U(x))$

$$=\cos x\cdot\frac{1}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\sin x}}}$$

Donc $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{g'(x)=\dfrac{\cos x}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\sin x}}}}$

Exercice n° 19

● f est dérivable sur]0 , 2[et $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x^3}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\dfrac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}=\frac{6x^2-3x^3+x^3}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^2(3-x)}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$$

Or $x\in[0,2[$ donc $(3-x)>0$ d'où $f'(x)\succ 0$

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{2-x}=\frac{8}{\underset{2-x\succ 0}{0^+}}=+\infty$$

●

f est continue et strictement croissante sur [0 , 2 [
Donc f réalise une bijection de [0,2[sur L'intervalle

$J=\left[f(0),\lim_{x\to 2}f(x)\right[=[0,+\infty[$ D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

Exercice n° 20

● la fonction $x\to\cos x$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $\cos x>0$ donc f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

● On a $f'(x)=-\dfrac{(\sqrt{\cos x})'}{\sqrt{\cos x}^2}=-\dfrac{\dfrac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$

$$f'(x)=-\frac{\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}$$

Comme pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x>0$ et $\sin x>0$

On aura $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)\succ 0$

* f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

D'où f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

Car $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\right[$ et on a

$f(0)=1$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

● a) $f^{-1}(1)=0$ et $f'(0)=0$ donc f^{-1} non dérivable à droite en 1

b)* f est dérivable, $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$

$$*(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(x)]}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{\sin(f^{-1}(x))}{2\cos(f^{-1}(x)).\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}}\quad(1)$$

Or $f\circ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}=x\Rightarrow\cos(f^{-1}(x))=\dfrac{1}{x^2}$

Aussi on a :

$$\sin(f^{-1}(x))=\sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))}=\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}$$
$$=\sqrt{\frac{1-x^4}{x^4}}=\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{x^4}}\ \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

Donc $\forall x\in]1,+\infty[$ on a : $\sin(f^{-1}(x))=\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$

Remplacent maintenant $\cos(f^{-1}(x)$ et $\sin(f^{-1}(x)$ par

Leurs expressions en fonction de x dans l'égalité (1) :

On trouve :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{2.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Conclusion :

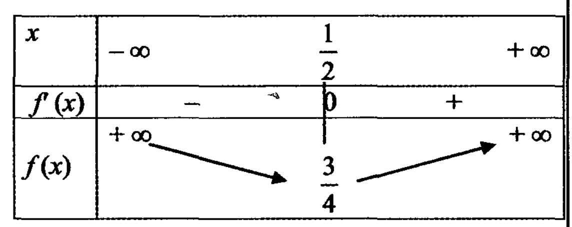
$$\forall x \in]1, +\infty[, \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}}$$

Exercice n° 1

$f(x)=x^2-x+1$; $g(x)=-x^2-2x+2$

● – Etudions la fonction f

Pour tout $x\in IR$ on a : $f'(x)=2x-1$

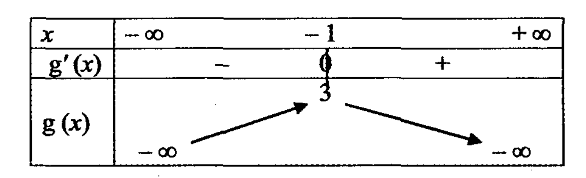


x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

– Etudions la fonction g

Pour tout $x\in IR$ on a : $g'(x)=-2x-2$



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

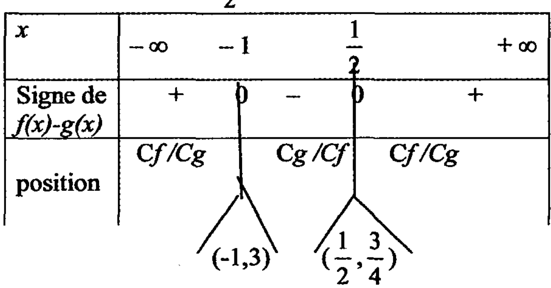
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$

● a) $f(x)-g(x)=(x^2-x+1)-(-x^2-2x+2)$
$=2x^2+x-1$

Etudions le signe du trinôme $2x^2+2x-1$ en effet :

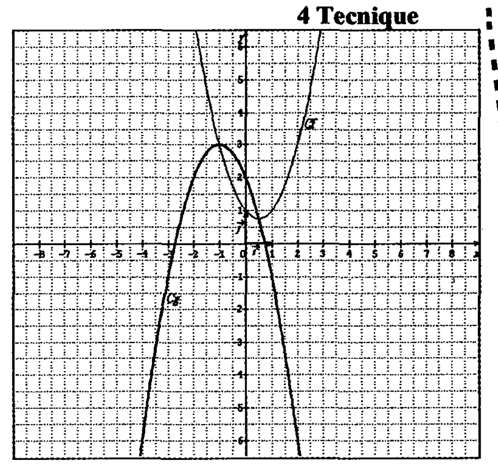
$2x^2+x-1=0$; on a : $a-b+c=0$

Donc $x'=-1$ et $x''=\frac{1}{2}$



x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
position	Cf/Cg	(-1,3)	Cg/Cf	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	Cf/Cg

b/ C_f et C_g sont deux paraboles



Exercice n° 2 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$

a) Pour tout $x\in IR$ on a : $f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)$

- Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$		$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

- Tableau des variations de f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{4}x^4=+\infty$

(On pourra remarquer que f est paire et on étudie f sur l'intervalle $[0,+\infty[$)

b) $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4-2x^2=x^2(\frac{1}{4}x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2=0$ *ou* $x^2=8\Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=\pm2\sqrt{2}$

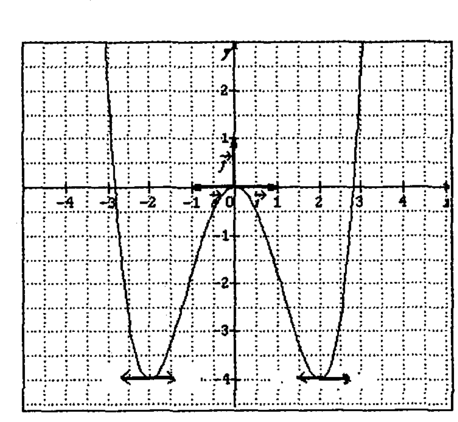
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x}=-\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au

Voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

d)



Exercice n° 3 f(x)=x³-4x²+3x+1

a) Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

$3x^2 - 8x + 3 = 0; \Delta = b^2 - 4ac = 28 \succ 0$

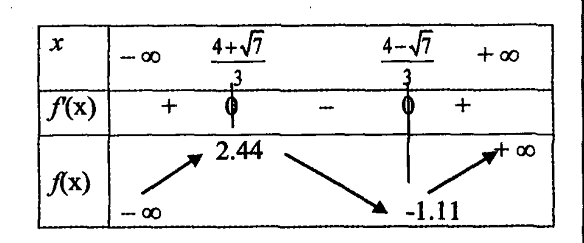
$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-2\sqrt{7}}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$f(\frac{4+\sqrt{7}}{3}) = f(2.21) \simeq -1.11$

$f(\frac{4-\sqrt{7}}{3}) = f(0.45) \simeq 2.44$



x	$-\infty$	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$		$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2.44	↘	-1.11	↗ $+\infty$

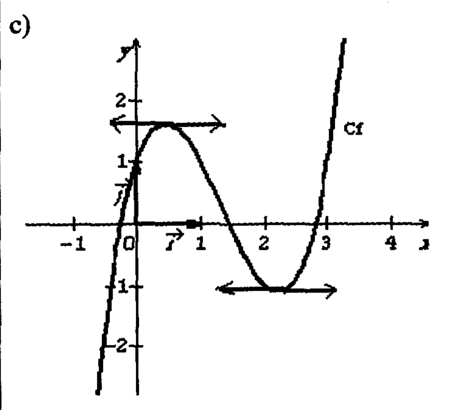
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = -\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au

Voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

c)



Exercice n° 4 f(x)=2x³-6x

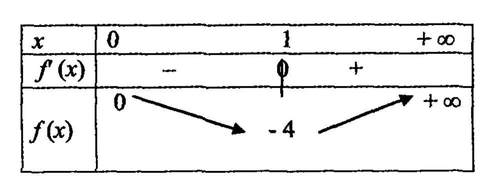
● $x \in IR$, $-x \in IR$

$f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire et par suite le point O origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de f

● On étudie f sur IR_+

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	- 4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

3) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \sqrt{3} \; ou \; x = -\sqrt{3}$

Donc : $Cf \cap (O, \vec{i}) = \{O; (\sqrt{3}, 0); (-\sqrt{3}, 0)\}$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2x^3}{x} = +\infty$

D'où Cf admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de + ∞(de même en -∞)

● a) T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -6x$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = -6x}$

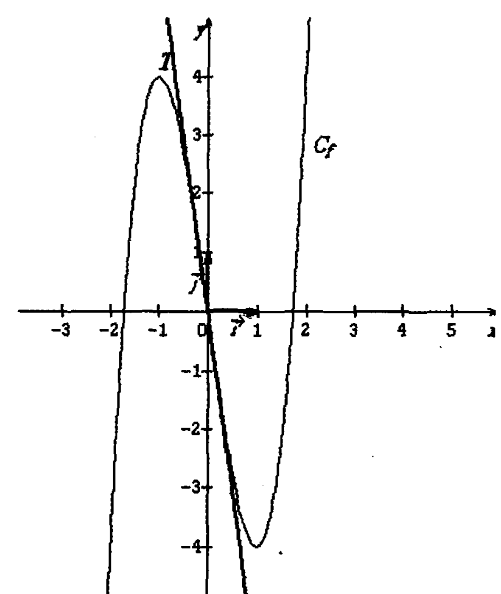
b) *Position de Cf. et sa tangente T :*

Etudions le signe de $f(x) - (-6x) = 2x^3$

D'où : Pour $x > 0$ Cf. Au dessus de T

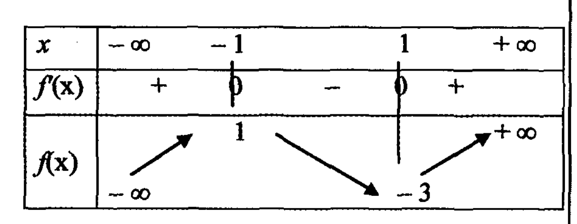
Pour $x < 0$ Cf. Au dessous de T

c)



Exercice n° 5 f(x)=x³-3x-1

● $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘	-3	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

2) ●● f est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $f(]-\infty,-1[)=\ ]-\infty,1[$

Comme $0 \in\ ]-\infty,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_1 dans $]-\infty,-1[$

$f(-2)=-3$ et $f(-1)=1$

$f(-2)\times f(-1)<0$ donc : $-2<\alpha_1<-1$

●● f est continue et strictement décroissante sur

$]-1,1[$ et $f(]-1,1[)=\ ]-3,1[$

Comme $0 \in\ ]-3,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_2 dans $]-1,1[$

$f(0)\times f(-1)=(-1).1<0$ donc : $-1<\alpha_2<0$

●● f est continue et strictement croissante sur

$]1,+\infty[$ et $f(]1,+\infty[)=\ ]-3,+\infty[$

Comme $0 \in\ ]-3,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_3 dans $]1,+\infty[$

$f(2)\times f(1)=(-3).1<0$ donc : $1<\alpha_3<2$

Conclusion

L'équation $f(x)=0$ admet exactement les trois solutions α_1, α_2 et α_3 dans IR

● a) * $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf. admet une branche infinie parabolique

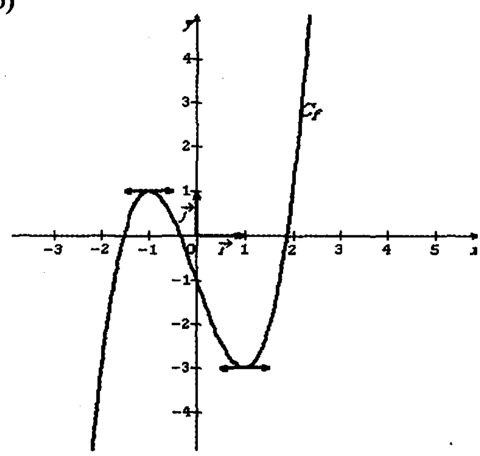
De direction (yy') au voisinage de $+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf. admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de $-\infty$

b)



Exercice n° 6 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1$

● $\frac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1=\frac{1}{2}\left(x^4-8x^3+20x^2-16x\right)-1$

$$=\frac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1=f(x)$$

Par suite $\forall x\in IR$ on a :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1$$

● $\forall x\in IR$; $4-x\in IR$ et

$$f(4-x)=\frac{1}{2}(4-x-2)^2\left[(4-x)^2-4(4-x)\right]-1$$

$$=\frac{1}{2}(2-x)^2\left[(4-x).(4-x-4)\right]-1$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)^2\left[x^2-4x\right]-1=f(x)$$

D'ou : $-2-f(x)\neq f(4-x)$ ce qui prouve que le point W (2 , – 1) n'est pas un centre de symétrie pour Cf. donc il faut rectifier la question comme suit :

Montrer que la droite Δ d'équation x=2 est un axe de symétrie pour C_f

3) a) **rectifier W(2 ;0)**

Soit M (x, y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

et Posons M (X, Y) relativement au repère $(W,\vec{i},\vec{j})$

On a :

$$\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{WO}+\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$=(x-2)\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{i}+Y\vec{j}$$

Donc on aura $\begin{cases}X=x-2\\ Y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=X+2\\ y=Y\end{cases}$

$M \in Cf \Leftrightarrow y=f(x)$

Remplacent x et y en fonction de X et Y dans l'expression de $f(x)$:

$$Y=\frac{1}{2}X^2\left[X^2-4\right]-1=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$$

Donc $F(X)=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$

b) X ∈ IR ; – X ∈ IR et F(– X) = F(X) donc F est une fonction paire ,on pourra donc étudier F sur IR_+

$F'(X)=2X^3-4X=2X.(X^2-2)$

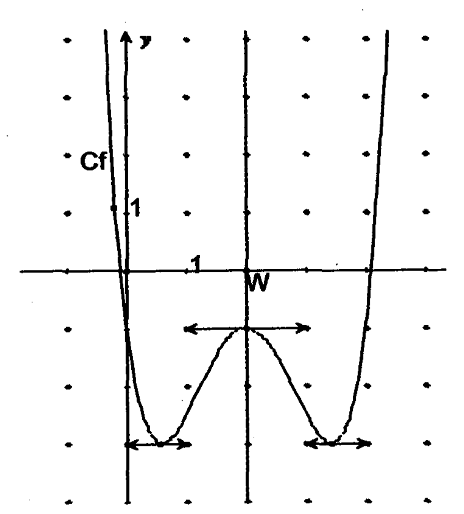
$\lim\limits_{X\to+\infty}F(X)=\lim\limits_{X\to+\infty}2X^3=+\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{F(X)}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}2X^2=+\infty$

D'où C_F. admet une branche infinie parabolique De direction (yy') au voisinage de + ∞

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		–	0	+	
$F(x)$	-1	↘	-3	↗	$+\infty$

c) On trace C_F dans le repère $(W,\vec{i},\vec{j})$ on obtient Cf



Exercice n° 7

● f est définie si et seulement si $x^2-4x+3\neq 0$

Or puisque a + b +c = 0 on aura

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x'=1$ *ou* $x''=3$

Donc $Df=IR\setminus\{1,3\}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

On a :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de x^2-4x+3		+	0	–	0	+	

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

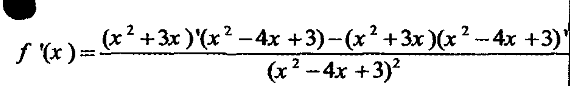
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\geq0}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

● les asymptotes de C_f sont les droites d'équations x = 1, x = 3 et y = 1

●



$$f'(x)=\frac{(x^2+3x)'(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-7x^2+6x+9}{(x^2-4x+3)^2};x\in Df$$

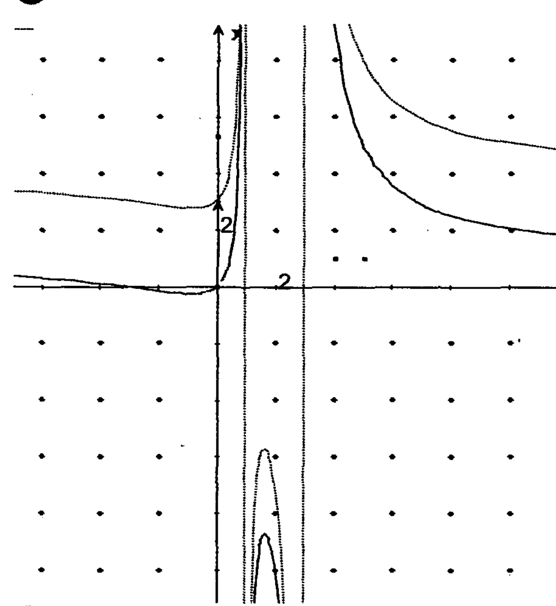
$$f'(x)=0\Leftrightarrow -7x^2+6x+9=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=9+9.7=8.9\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=6\sqrt{2}$$

$$x'=x'=\frac{3-6\sqrt{2}}{7}\approx-0,78\,et\,x''=\frac{3+6\sqrt{2}}{7}\approx 1,6$$

x	$-\infty$	x'		1		x''		3	$+\infty$
f'(x)	−	0	+	‖	+	0	−	‖	−
f(x)	1 ↘	-0.3	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-8.7	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1

●



● on pourra remarquer graphiquement que C_f n'admet pas un axe de symétrie **erreur**

● a) $\forall x\in IR\setminus\{1,3\}$

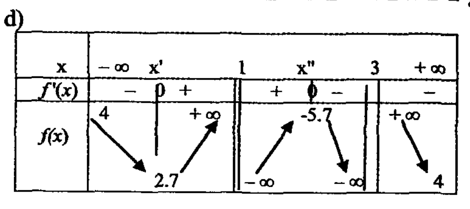
$$g(x)-f(x)=\frac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3}-\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\frac{3x^2-12x+9}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}=3\Rightarrow g(x)=f(x)+3$$

b) On obtient C_g par translation de C_f de vecteur $3\vec{j}$

c) voir repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

d)



x	$-\infty$	x'		1		x''		3	$+\infty$
f'(x)	−	0	+	‖	+	0	−	‖	−
f(x)	4 ↘	2.7	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-5.7	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 4

Exercice n° 8 $\quad f(x)=\frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$

● a) f est définie si et seulement si $|x+1|-|x-1|\neq 0$

Or $|x+1|-|x-1|=0\Leftrightarrow|x+1|=|x-1|$

$$\Leftrightarrow x+1=x-1\ ou\ x+1=-(x-1)=-x+1$$

$$\Leftrightarrow \underset{impossible}{1=-1}\ ou\ x=0\ d'où\ Df=IR^*$$

b) $x\in IR^*$, $-x\in IR^*$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{|-x+1|-|-x-1|}=\frac{x^2}{|-(x-1)|-|-(x+1)|}$$

$$\underset{|-a|=|a|}{=}\frac{x^2}{|x-1|-|x+1|}=-f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

● Ecrivant $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	—	0	+		+
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$x-1$	—		—	0	+
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$

Don on aura : $\begin{cases} f(x)=-\frac{x^2}{2} & si\ \leq 1 \\ f(x)=\frac{x}{2} & si\ -1\leq x\leq 1 \\ f(x)=\frac{x^2}{2} & si\ x\geq 1\end{cases}$

On a : $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$

D'où f admet un prolongement par continuité noté g tel que : $g:x\to\begin{cases}g(x)=f(x) & si\ x\neq 0\\ g(0)=0\end{cases}$

● a) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

Donc g est dérivable en 0 et g' (0) = $\frac{1}{2}$

b) $g'(x)=\begin{cases}-x & pour\ x\le -1\\ \frac{1}{2} & pour\ -1\le x\le 1\\ x & pour\ x\ge 1\end{cases}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g'(x)	+	+	+	
g(x)	$-\infty$ ↗			$+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x^2=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2=+\infty$

● a)

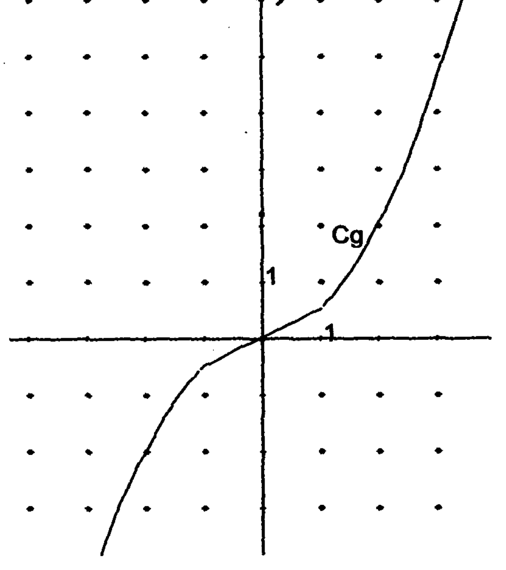
$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique au Voisinage de $-\infty$ de direction $(o\vec{j})$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique au Voisinage de $+\infty$ de direction $(o\vec{j})$

b)



Exercice n° 9 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}$

● a) $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}=\frac{x^2+2x+1-2}{x+1}$

$=\frac{(x+1)^2-2}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}-\frac{2}{x+1}=x+1-\frac{2}{x+1}$

2^{eme} méthode :

$f(x)=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\ b=-1-c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$ et $c=-2$

Donc $f(x)=x+1-\frac{2}{x+1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ C_f admet la droite Δ d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique.

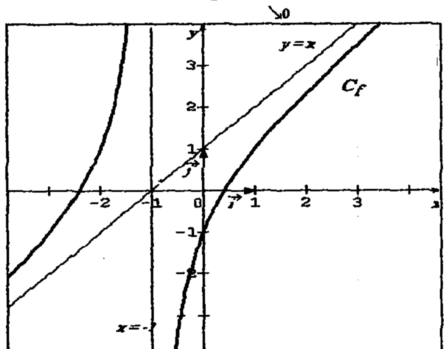
$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ donc la droite D'équation : x=-1 est une asymptote verticale à Cf

● $f'(x)=1+\frac{2}{(x+1)^2}\succ 0\quad \forall x\neq -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1-\frac{2}{x+1}=+\infty$ ($x+1\to+\infty$, $\frac{2}{x+1}\to 0$)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1-\frac{2}{x+1}=-\infty$ ($x+1\to-\infty$, $\frac{2}{x+1}\to 0$)



Exercice n° 10 $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$

● a) $Df=IR^*$

b) f est dérivable sur IR^* est

$f'(x)=\frac{(x^4)'x^2-(x^2)'(x^4-1)}{x^4}=\frac{4x^3x^2-2x(x^4-1)}{x^4}$

$f'(x)=\frac{4x^5-2x^5+2x}{x^4}=\frac{2x(x^4+1)}{x^4}$ a le signe de x

f est une fonction paire ($f(-x) = f(x)$).
On étudie f sur IR*+

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

● a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

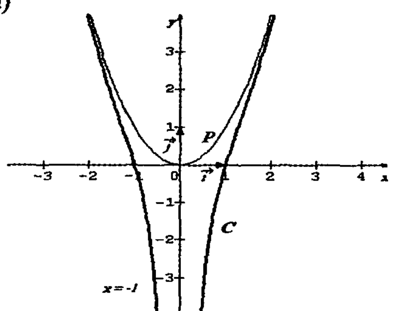
C admet une BIP au *Voisinage de* $-\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

b) P: $y = x^2$

c) $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{|x|\to+\infty} x^2 - \frac{1}{x^2} - x^2 = 0$

Au voisinage de l'infinie C se comporte comme P donc elle admet deux branches paraboliques infinies de direction $(O,\vec{j})$

d)



Exercice n° 11

● a) Df = IR

- $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = f(2)$

Donc f est continue à gauche en 2

- $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} = f(2)$

Donc f est continue à droite en 2
Conclusion : f est continue en 2

b) • $\lim_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{x-2}$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}$$

On va factoriser l'expression x^3-3x-2
On sait que 2 est une racine de : $x^3-3x-2=0$
Donc $x^3-3x-2 = (x-2).(x^2+ax+b)$
$= x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$
Par identification on trouve : a = 2 et b = 1 ,d'où :

$$\lim_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{1}{3}.(x+1)^2 = 3$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2) = 3$

• $\lim_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{3}}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{\frac{x^2-4x-4}{3(x+1)}}{x-2}$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{3x^2-4x-4}{3(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to2^+} \frac{(3x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{3x+2}{3(x+1)} = \frac{8}{9}$$

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2) = \frac{8}{9}$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2
Interprétation : Au point A(2 ;$f(2)$) Cf Possède :
* une demi –tg à gauche de Coefficient directeur 3
* une demi -tg à droite de Coefficient directeur $\frac{8}{9}$

(Le point A(2 ;$f(2)$) est un point anguleux.

● a) On a pour $x \geq 2$:

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$$

$$\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1} = f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \text{ et } c=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$

b) • $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

Au voisinage de $+\infty$:Cf admet la droite D d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique

• $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+1} > 0$ pour $x \geq 2$ donc

C$_f$ est au dessus de D sur [2 ;+∞[

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = +\infty$

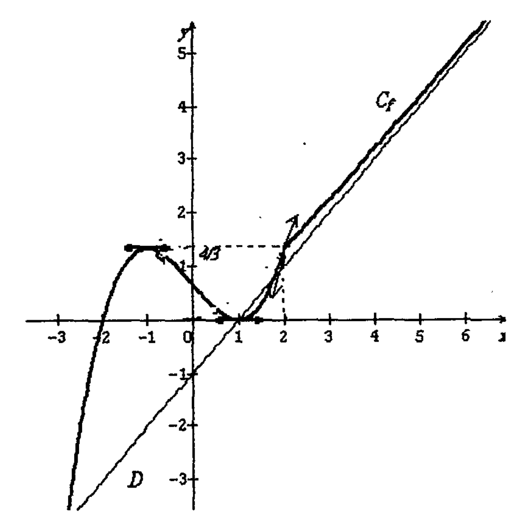
Au voisinage $-\infty$ Cf admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$

- Variation de f :

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2]$ *et* $[2,+\infty[$; on a :

$$\begin{cases} f'(x)=x^2-1 & x<2 \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & x>2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4/3$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$



Exercice n° 12 $\quad f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

1) $Df=\{x\in IR;(x-1)^2\neq 0\}=IR-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

2) a) On a

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0\Rightarrow b=-1 \\ c-b=0\Rightarrow b=-1 \end{cases}$

D'ou $\forall x\in IR-\{1\}: f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty \Rightarrow$ la droite $x = 1$ est une asymptote

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$$

Ce qui prouve que la droite d'équation : $y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $Df=IR-\{1\}$ et on a :

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)^4+(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x-1)^3+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x^3-3x^2+3x-1+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

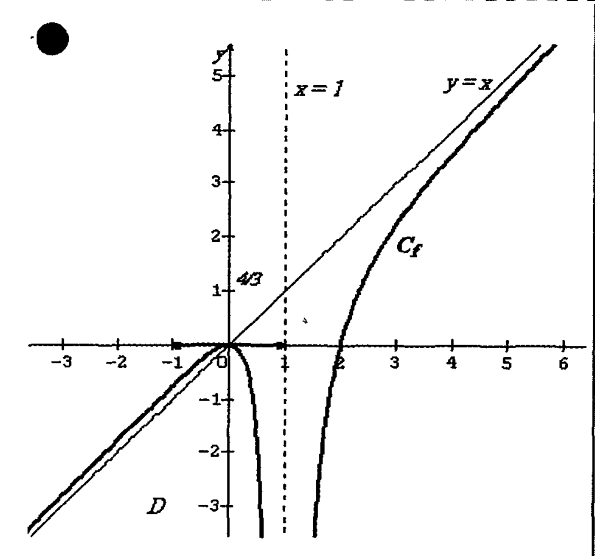
$$=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4}$$

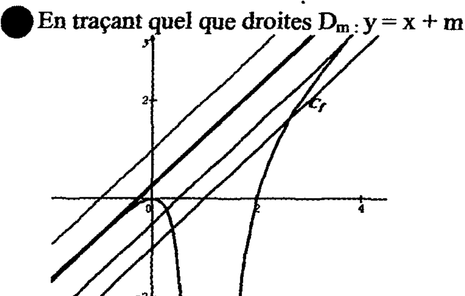
Or pour le signe de x^2-3x+4, on a $\Delta=9-16<0$ donc $x^2-3x+4>0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$ d'ou le tableau de variation de f *suivant* :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

●



● En traçant quel que droites $D_m : y = x + m$



On remarque que :

- Si $m = \frac{1}{4}$ ou $m=0$: un seul point d'intersection
- Si $m < \frac{1}{4}$ et $m\neq0$: deux points d'intersection
- Si $m > \frac{1}{4}$: aucun point d'intersection

Exercice n° 13 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

● a) $Df = \{x \in IR ; x^2-2x-3 \geq 0\}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
Signe de x^2-2x-3	+	0	−	0	+

D'où $\boxed{Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[}$

b) $x \to x^2-2x-3$: est continue et $x^2-2x-3 \geq 0$ pour tout $x \in Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ donc la fonction f est continue sur $Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$

b)

- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x+1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}^2}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Donc f non dérivable à gauche en (-1)

Interprétation : C_f admet au point $(-1 ;0)$ une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

- $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x-3}$

$$= \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}^2}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$\lim_{x\to3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to3^+} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Donc f non dérivable à droite en 3

Interprétation : C_f admet au point $(3 ;0)$ une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x-3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x-3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

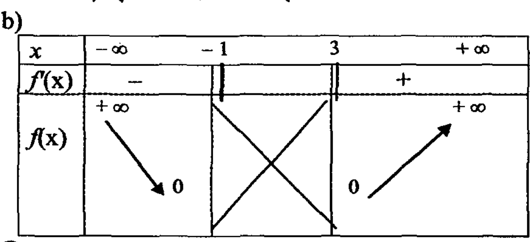
● a) $x^2-2x-3 > 0$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x-3)'}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

b)



x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	−	‖	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

● a) Pour tout $x \in Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ on a

$x^2-2x-3 = x^2-2x+1-4 = (x-1)^2-4$

Donc $f(x) = \sqrt{(x-1)^2-4}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x+1] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2-4}^2-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2-4-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}_{+\infty}} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+x-1] = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{(-x+1)^2-4}-(-x+1)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(-x+1)^2-4}^{\,2}-(-x+1)^2}{\sqrt{(-x+1)^2-4}+(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x+1)^2-4-(-x+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(-x+1)^2-4}-x+1}_{+\infty}}=0$$

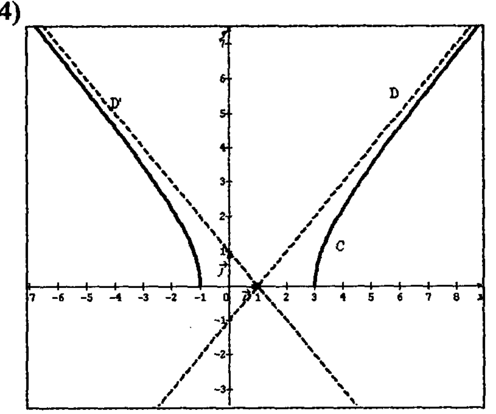
c) on a • $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ d'équation : $y = x - 1$

• on a $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $-\infty$ d'équation : $y = -x + 1$

4)



Exercice n° 14 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2-1}$

● On a :

$$(x-2)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow |x-2|\geq 1 \Leftrightarrow x-2\leq -1 \;ou\; x-2\geq 1$$

$$\Leftrightarrow x\leq 1 \;ou\; x\geq 3$$

Donc : $Df =]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

● a) $x\leq 1 \Rightarrow 2-x\geq 3$ ∘ $x\geq 3 \Rightarrow 2-x\leq 1$

Donc

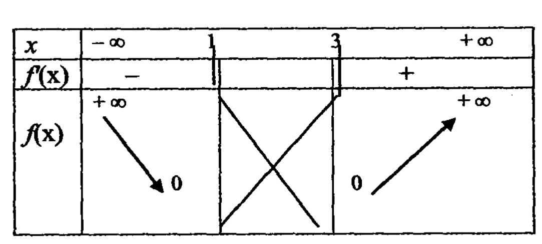
$x\in Df \Rightarrow 4-x\in Df$

$f(4-x)=\sqrt{(4-x-2)^2-1}=\sqrt{(2-x)^2-1}=\sqrt{(x-2)^2-1}$

$\Rightarrow f(2\times 2-x)=f(x)$ d'où la droite D: $x=2$ est un axe de symétrie pour la courbe C

b) f est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x)=\frac{((x-2)^2-1)'}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{2(x-2)}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{x-2}{\sqrt{(2-x)^2-1}}$$



x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x-2)^2-1}-(x-2)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-2)^2-1}^{\,2}-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-4}+(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2-4-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-1}+x-2}$$

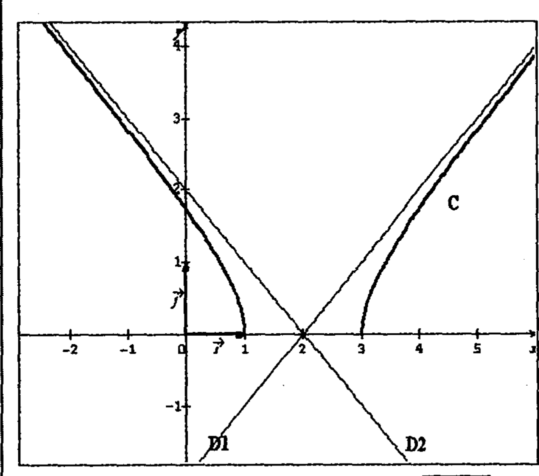
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-2)^2-4}+x-2}_{+\infty}}=0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_1 d'équation : $y = x - 2$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

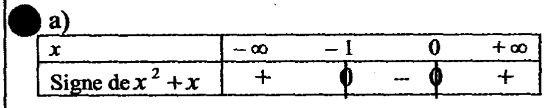
De même $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_2 d'équation : $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$



Exercice n° 15 $f(x)=1-\sqrt{x^2+x}$

● a)



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $Df =]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$

b)

$x\in Df \Rightarrow x<-1 ou x>0 \Rightarrow -1-x>0 ou -1-x<-1$

$\Rightarrow -1-x\in Df$

$f(-1-x)=1-\sqrt{(-1-x)^2-1-x}=1-\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow f(2\times(-\frac{1}{2})-x)=f(x)$ D'où la droite

D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C

c) D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C donc on

pourra étudier f sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\cap Df=[0,+\infty[$

● a)

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f\,0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{x^2+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{x^2+x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x(x+1)}{x\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

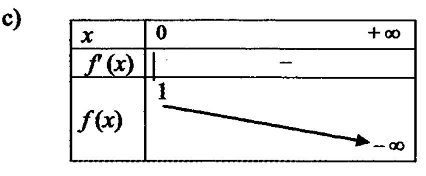
f n'est pas dérivable en 0 .

Cf Possède une Demi tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0.

$\forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=0-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$=-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}<0$

c)



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	−
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{+\infty}=-\infty$

● a)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x^2+x})-(-x+\frac{1}{2})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\frac{1}{2})^2-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\frac{1}{4}-x^2-x}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}_{+\infty}}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})$ ce qui prouve que

La droite D d'équation : $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}\geq0$: C au dessus D

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x}$

$|x|=-x$ pour $x\leq0$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt{x^2+x}-x$

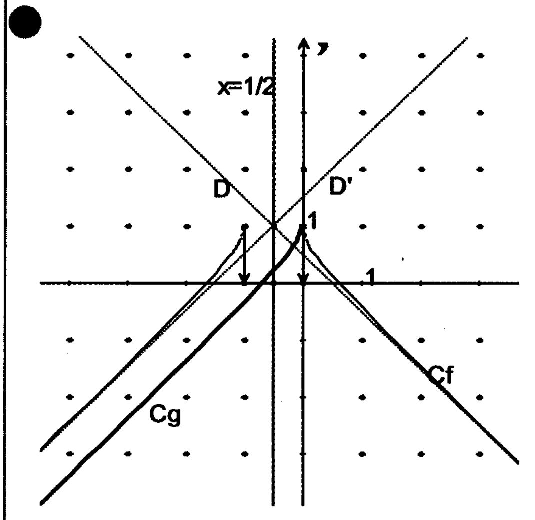
$=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)-\sqrt{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)^2-(x^2+x)}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-2x+x^2-x^2-x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-3)}{x(\frac{1}{x}-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}=\frac{3}{2}$

Donc D': $y=x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique pour C_f au voisinage de $-\infty$

●



● g est définie sur IR car $x^2+|x|\geq0$

• Or pour $x\geq0$ on a : $x=|x|$ donc $f(x)=g(x)$

D'où sur [0, +∞[, la courbe de g ce coïncide avec C_f.

• $x\in IR,-x\in IR$ et $g(-x)=g(x)$

Donc g est paire, par suite C_g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice n° 16 $f_n(x)=x^n\sqrt{x-1}$

$f_n(x)=x^n\sqrt{x-1},n\in IN$

● $Df_n=[1,+\infty[$

● Sur $]1,+\infty[$; f_n est dérivable et on a :

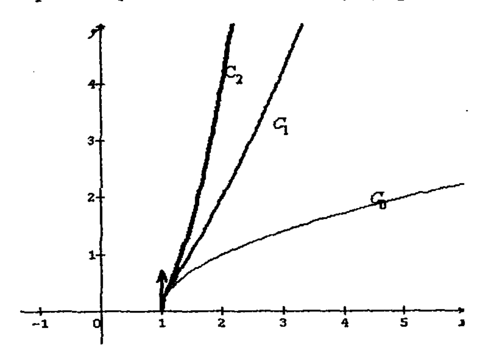
$$f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{x-1} + x^n.\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2nx^{n-1}(x-1)+x^n}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x^{n-1}\left[\overbrace{2n(x-1)+x}^{\geq 0}\right]}{2\sqrt{x-1}}, n \geq 1$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	+
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

● $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n\sqrt{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1}\sqrt{x-1} = +\infty$; $n \geq 1$

Au voisinage $+\infty$ Cf_n Admettent une branche parabolique infinie de direction $(O,\vec{j})$ pour $n \geq 1$



Exercice n° 17 $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

● on sait que ; $x \to \sin(ax+b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ périodique $a \neq 0$

Donc $\frac{2\pi}{2} = \pi$ est une période de $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ 2)

a) $f'(x) = 2\cos(2x + \frac{2\pi}{3}); x \in IR$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + \frac{2\pi}{3}) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Or : $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow$ $0.16 \approx \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{13}{6} \approx 2.16 \Leftrightarrow k = 1$ ou $k = 2$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$ ou $x = \frac{11\pi}{12}$

b)

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	−1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

●

• si $k \succ 1$ ou $k \prec -1 \Rightarrow 0$ solution

• si $k = 1$ ou $k = -1 \Rightarrow 2$ solutions

• si $k \in]-1;1[\setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \Rightarrow 4$ solutions

• si $k = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5$ solutions

Exercice n° 18

$x \in IR, f(x) = \sin 2x - 2\sin x$

●

$x \in IR, -x \in IR$ et $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)$

$= -\sin 2x + 2\sin x$

$= -(\sin 2x - 2\sin x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Donc g est impaire

● • le plus petit réel strictement positif T vérifiant $f(x+T) = f(x)$ est $T = 2\pi$ .donc f est 2π-périodique

● f est de période 2π donc on pourra étudier f sur l'intervalle $Df \cap [-\pi,\pi] = IR \cap [-\pi,\pi] = [-\pi,\pi]$

De plus f est impaire par la suite on étudie f sur $[0,\pi]$

• On a : $f'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x$, or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Ce qui donne : $f'(x) = 2(\cos^2 x - \cos x - 1)$

Posons $\cos x = t$ on trouve :

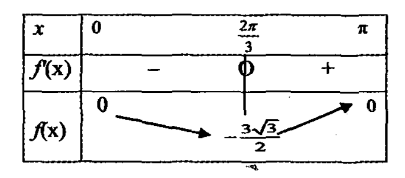
$$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = 1 \text{ ou } t'' = -\frac{1}{2}, car : a+b+c = 0 \\ t = \cos x \end{cases}$$

donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x \in [0,\pi]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

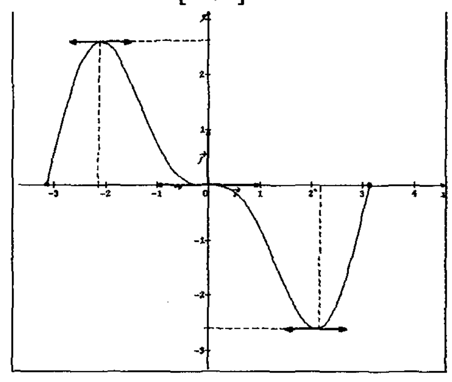
Conclusion $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{2\pi}{3}$

Tableau des variations de f :



x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

• Courbe C sur $[-\pi,\pi]$:



Exercice n° 19 $f(x)=\sin x+\cos^2 x$

● $x\in IR, x+2\pi \in IR$ et

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\cos^2(x+2\pi)$

$=\sin x+\cos^2 x=f(x)$

Donc f est 2π- périodique

● $x\in IR, 2\times\frac{\pi}{2}-x=\pi-x\in IR$

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\cos^2(\pi-x)$

$=\sin x+(-\cos x)^2=\sin x+\cos^2 x$

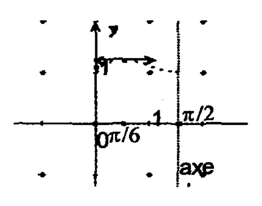
$=f(x)$

Donc la droite $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

3) g restriction de f à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x)=\cos x-2\cos x.\sin x=\cos x(1-2\sin x)$ a le même signe que 1-2sin x

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		$+$	0	$-$	
g(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1



Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

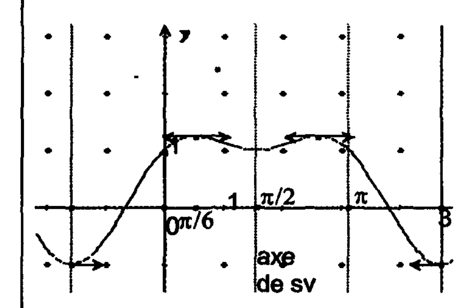
Tableau des variations de h :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	-1	↗	1

Soit C' la réunion de C_h et C_g

La courbe de la restriction de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ est la réunion de C' et $S_\Delta(C')$ avec $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$

Courbe Cf sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$:



Exercice n° 20 $g(x)=tg(x)-x$

● g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$g'(x)=1+tg^2x-1=tg^2x\geq 0$

$g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx-x=+\infty-\frac{\pi}{2}=+\infty$

Tableau des variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		$+$	‖
g(x)	0	↗	$+\infty$ ‖

On constate que 0 est un minimum global pour g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x)\geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

● $\bullet \forall x\in IR^*, \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq 1 \Rightarrow |x|.\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq |x|$

$\Rightarrow \left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, par suite f est continue en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* et u (IR*) = IR*
Et la fonction $\sin x$ est continue sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* par suite $f(x)$ est continue sur IR* (produit de deux fonction continues)

Finalement : f est continue sur IR* et en 0 donc f est continue sur IR

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

Pas de limite en 0 donc f non dérivable en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* et u (IR*) = IR*
et la fonction $\sin x$ est dérivable sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* par suite $f(x)$ est dérivable sur IR* (produit de deux fonction dérivables)

Conclusion : f est dérivable sur IR*

● h restriction de f sur $]2,+\infty[$

a)

$$h'(x)=\sin\frac{\pi}{x}+x\times\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\times\left(-\cos\frac{\pi}{x}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$$

$$x\succ 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\prec\frac{\pi}{x}\prec\frac{\pi}{2}\quad d'ou\ h'(x)\geq 0$$

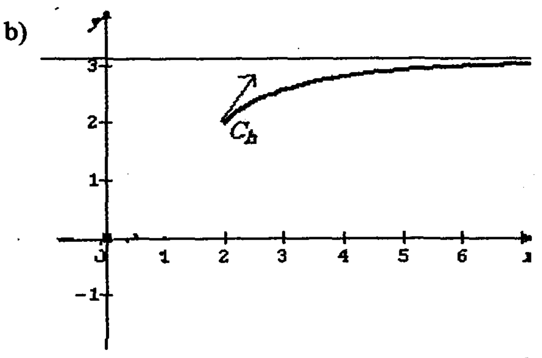
x	2 $\quad\quad\quad$ $+\infty$
h'(x)	+
h(x)	2 ↗ π

$$\lim_{x\to 2^+}h(x)=\lim_{x\to 2^+}x\sin\frac{\pi}{x}=2\times 1=2$$

Posons $t=\frac{\pi}{x}$, si $x\to+\infty$ alors $\frac{\pi}{x}\to 0$ et $x=\frac{\pi}{t}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{t\to 0}h(t)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\pi\times\frac{\sin t}{t}\right)=\pi$

b)

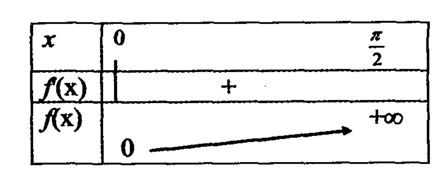


c) h est continue et strictement croissante sur $]2,+\infty[$ donc h réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]2,\pi[$

Exercice n° 21 $\quad f(x)=\sqrt{tg(x)}$

● f est dérivable sur $\left]O;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{tg'(x)}{2\sqrt{tgx}}=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tgx}}\succ 0$$

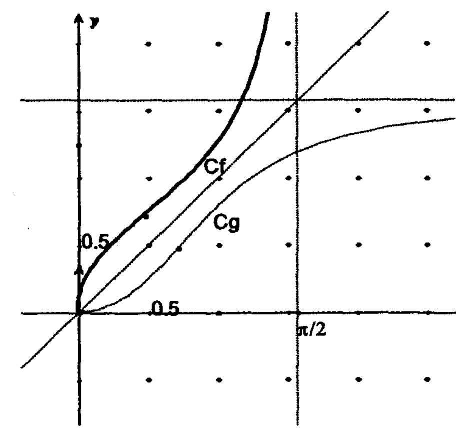


x	0 $\quad\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{tgx}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x\sqrt{tgx}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{tgx}}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f est non dérivable à droite en 0 et Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut



● f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$

3) $g=f^{-1}$

a) Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point O une demi-tg horizontale d'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

f est dérivable sur $\left]O;\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)\neq 0\ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion : g est dérivable sur $[0,+\infty[$

* $\forall x\in]0;+\infty[\ ;g'(x)=\frac{1}{f'[(g)(x)]}$

$$=\frac{1}{\frac{1+tg^2(g(x))}{2\sqrt{tg(g(x))}}}=\frac{2\sqrt{tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}\ (1)$$

Or: $fog(x)=\sqrt{tg(g(x))}=x \Rightarrow tg^2(g(x))=x^4$

Conclusion : $\boxed{g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}, \forall x \in [0,+\infty[}$

b) $f(0)=0$ donc $g(0)=0$

$g(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{tg\alpha}=1 \Leftrightarrow tg\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{g(1)=\frac{\pi}{4}}$

c) $\forall x \in]0,+\infty[$, posons : $F(x)=g(x)+g(\frac{1}{x})$

• $x \to u(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ ce qui prouve que $g(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par suite $F(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de deux fonction dérivables)

$$F'(x)=g'(x)+(g(\frac{1}{x}))'=g'(x)+(\frac{1}{x})'g'(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{1}{x^2}\times\frac{2}{x(\frac{x^4+1}{x^4})}$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{x^3(\frac{x^4+1}{x^4})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{(\frac{x^4+1}{x})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2x}{1+x^4}=0$$

D'où $F'(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=k$ (constante)

Or $F(1)=g(1)+g(\frac{1}{1})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, g(x)+g(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}}$

4) a) • $x \to \cos\pi x$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

Or: $\pi x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\pi x \neq 0 \Rightarrow v(x)=\frac{1}{\cos\pi x}$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ et on a : $v'(x)=\frac{\pi\sin\pi x}{\cos^2\pi x}$

• $x \in]-\frac{1}{2},0[\Rightarrow \sin\pi x \prec 0$

• $x \in]0,\frac{1}{2}[\Rightarrow \sin\pi x \succ 0$

Donc v est décroissante sur $]-\frac{1}{2},0[$ et elle est croissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ par suite $v(]-\frac{1}{2},0[)=]1,+\infty[$ et $v(]0,\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

Conclusion : $v(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

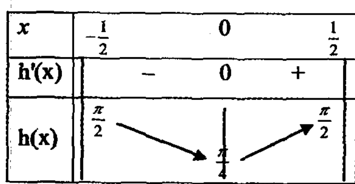
Comme $]1,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0,+\infty[$ il découle:

$g(\frac{1}{\cos\pi x})$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

• $\forall x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[: h'(x)=(\frac{1}{\cos\pi x})'g'(\frac{1}{\cos\pi x})$

$$h'(x)=\frac{\pi\sin\pi x}{\cos^2\pi x}\times\frac{2\frac{1}{\cos\pi x}}{1+(\frac{1}{\cos\pi x})^4}=\frac{2\pi\cos\pi x.\sin\pi x}{1+\cos^4\pi c}$$

Puisque sur, $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, $\cos\pi x \geq 0$ alors le signe de $h'(x)$ est celui de $\sin\pi x$ qui s'annule et change de signe en 0



x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

* $h(0)=g(\frac{1}{\cos 0})=g(1)=\frac{\pi}{4}$

* $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{1}{\cos\pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X\to(-\frac{\pi}{2})^+}\frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}h(x)=\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}g(\frac{1}{\cos\pi x})=\frac{\pi}{2}$

* $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{1}{\cos\pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}g(\frac{1}{\cos\pi x})=\frac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}h(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}h(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc h est prolongeable par continuité et soit $H(x)$ le prolongement par continuité de h on a :

$$\begin{cases} H(x)=h(x) & x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\\ H(\frac{1}{2})=H(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 22

1) a)

$\forall x \in IR, (\cos x)'=-\sin x$ et $(\cos^2 x)'=-2\cos x.\sin x$

$\Rightarrow (-2\cos^2+2\cos x+1)'=4\sin x\cos-2\sin x$

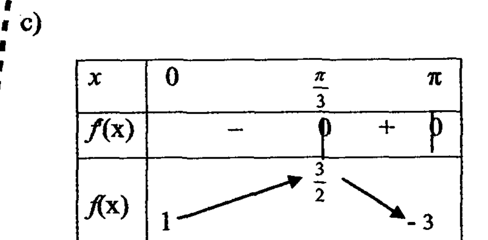
donc $\boxed{f'(x)=2\sin x(2\cos x-1)}$

b) $2\sin x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$ ou $\cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}$ dans $[0;\pi]$

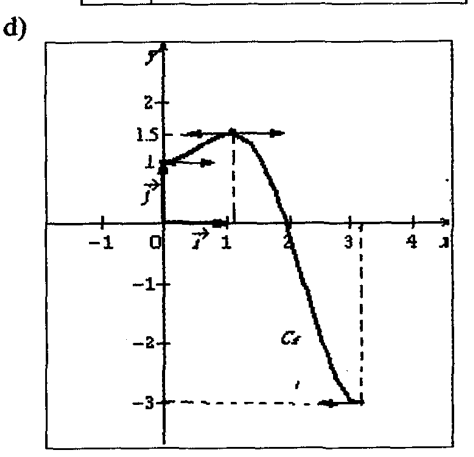
D'où $S_{[0,\pi]}=\{0,\pi,\frac{\pi}{3}\}$

c)



x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3

d)



a) g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur L'intervalle J $=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur L'intervalle J $=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

b) g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et g' (x) $\neq 0$ pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$ donc g^{-1} est dérivable sur $D=\left]-3,\frac{3}{2}\right[$

b) t ∈ J, on sait que : $g\circ g^{-1}(t) = t$ donc on a :

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1=t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1-t=0\ (E)$$

Dans l'équation (E) posons cos $(g^{-1}(t))$ = X on aura :

$-2X^2+2X+1-t=0\ (E')\ et\ X=\cos(g^{-1}(t))$

On va résoudre l'équation (E'). $-2X^2+2X+1-t=0$

$\Delta' = b'^2-ac=1+2(1-t)=3-2t\geq 0\ car\ t\leq\frac{3}{2}$

D'où $\begin{cases} X'=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2} \\ X''=\dfrac{-1-\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2}\end{cases}$

Ce qui donne $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2}\geq 0$

ou $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}$

Or le cos change de signe sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g^{-1}(t)\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Donc : $\boxed{\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

On sait que : $\cos^2(g^{-1}(t))+\sin^2(g^{-1}(t))=1$ d'où

$\sin^2(g^{-1}(t))=1-\cos^2(g^{-1}(t))$

$$=1-\left(\frac{1-\sqrt{3-2t}}{2}\right)^2=\frac{4-(1-2\sqrt{3-2t}+3-2t)}{4}$$

$$=\frac{2t+2\sqrt{3-2t}}{4}=\frac{\overbrace{t+\sqrt{3-2t}}^{\geq 0}}{2}$$

Donc : $\boxed{\sin(g^{-1}(t))=\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

Calculons maintenant la dérivée de $g^{-1}(t)$

$\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[$: $(g^{-1})'(t)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(t))}$

$$=\frac{1}{2\sin g^{-1}(t).(2\cos g^{-1}(t)-1)}$$

Remplaçant sin $(g^{-1}(t))$ et cos $(g^{-1}(t))$ par les résultas (1) et (2) trouvées précédemment il résulte :

$$(g^{-1})'(t)=\frac{1}{2.\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}}\left(2.\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}-1\right)}\Rightarrow$$

$\boxed{(g^{-1})'(t)=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{2\left(\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}\right)}\right)\left(\sqrt{3-2t}\right)}},\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[$

Exercice n° 23 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$

a) $\forall x\neq -2$:

$$-x+2-\frac{3}{x+2}=\frac{4-x^2-3}{x+2}=\frac{1-x^2}{x+2}=f(x)$$

●

f est deux fois dérivables sur $IR\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle)

$$f'(x)=(-x+2-\frac{3}{x+2})'=-1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=(-1+\frac{3}{(x+2)^2})'=-\frac{3\times 2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{6(x+2)}{(x+2)^4}$$

Tableau des variations de f'

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	||	−
$f'(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	||	$+\infty \searrow -1$

Donc puisque $[-1,1]\subset]-2,+\infty[$ en déduire que f' est strictement décroissante sur $[-1,1]$

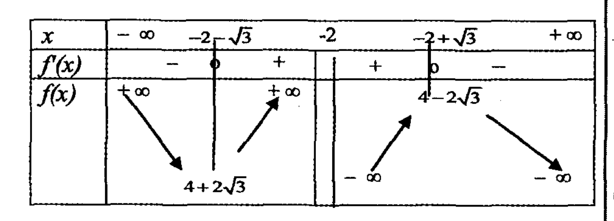
$$f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$$

d)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow (x+2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{3}\ ou\ x+2=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{3}\ ou\ x=-2-\sqrt{3}$$



x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	||	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \overbrace{-x}^{\nearrow(-\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow+\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \overbrace{-x}^{\nearrow(+\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow-\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} \overbrace{-x+2}^{4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-} \overbrace{-x+2}^{4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^-}=-\infty$$

e)

$$0\le x\le 1\Leftrightarrow 4\le (x+2)^2\le 9\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3}{(x+2)^2}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le -1+\frac{3}{(x+2)^2}\le -\frac{1}{4}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow \left|-1+\frac{3}{(x+2)^2}\right|\le\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)|\le\frac{2}{3},\forall x\in[0,1]$$

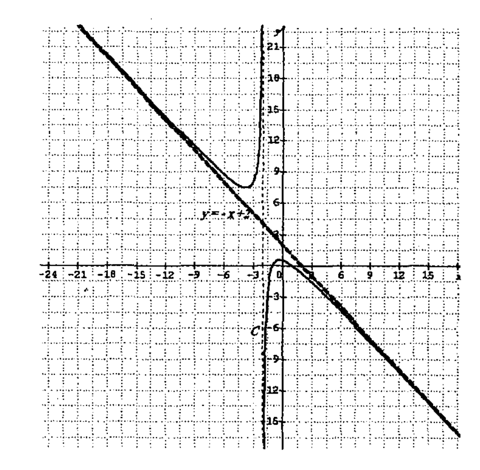
f) f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in[0,1]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $x\in[0,1]$ et $y\in[0,1]$: $|f(x)-f(y)|\le\frac{2}{3}|x-y|$

● Comportement de f au voisinage de l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x+2}=0$$

$\Rightarrow y=-x+2$ est une asymptote oblique à C



● a) $t\in IR$,

$$g(\pi-t)=\frac{1-\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}\overset{(\sin(\pi-t)=\sin t)}{=}\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=g(t)$$

b) $g(\pi-t)=g(t)\Rightarrow$ la droite $\Delta : t=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C de plus g est de période 2π donc l'étude et la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe de g ;en effet C_g est la réunion des images de $(C_1 \cup C_1')$ par les translations de vecteurs $k.2\pi\vec{i}$ $k\in\mathbb{Z}$ avec C_1 la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $C_1'=S_\Delta(C_1)$

c) On remarque que g(t)=f(sin(t))

Donc g'(t)= sin'(t) .f'(sin(t))=cos(t).f'(sin(t))

Donc : $g'(t))=\cos t\times f'(\sin t)$

d)

$g'(t))=0=\cos t\times f'(\sin t)\Rightarrow \cos t=0$ *ou* $f'(\sin t)=0$

Comme $\cos t\neq 0$ alors : $g'(t))=0\Leftrightarrow f'(\sin t)=0$

Or on sait que f' est strictement décroissante

sur $[-1,1]$ et $f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$

D'autre part la fonction sin est une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$

Donc la fonction t→f'(sin(t)) est une bijection

strictement décroissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{3},2\right]$

Et Comme $0\in\left[-\frac{3}{2},2\right]$ donc l'équation $f'(\sin t)=0$

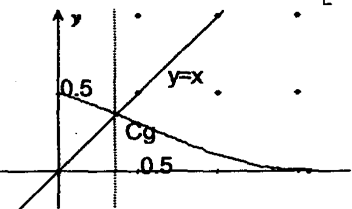
admet une unique solution $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

e) $f'(\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \sin\alpha=-2+\sqrt{3}$ d'où

$$g(\alpha)=\frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha}=\frac{1-(4-4\sqrt{3}+3)}{1+2-\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-6}{3-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow g(\alpha)=-\frac{7}{2}+\sqrt{3}$$

f) g'(t) à le signe de $f'(t)\leq 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$



a) l'intersection de C_g et la droite y = x est le point d'abscisse 0.37 donc : g (t) = t donne t = 0.37

b) posons h (t) = g(t) – t

$h'(t)=g'(t)-1\leq 0$ d'où h est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h(\frac{\pi}{2}),h(0)\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$

Comme $0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$ on aura l'équation g(t) – t = 0 admet une solution unique t_0 appartient à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5) a) g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a:

$|g'(x)|=|f'(\sin t)\times\cos t|\leq\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $t_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

et $u_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$:|g(u_n)-g(t_0)|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|\Leftrightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$

b) • pour n = 0 on a : $|u_0-t_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^0|u_0-t_0|$

Vrai car $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

• Supposons que $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$ et montrons que $|u_{n+1}-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$, en effet :

$|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$ *et* $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

$\Rightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$

Donc d'après le principe de raisonnement par récurrence on a pour tout entier naturel n : $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

c) Puisque $-1\leq\frac{2}{3}\leq 1$ il résulte $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ et par suite

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n\overbrace{|u_0-t_0|}^{\neq 0\ (constante)}=0$ ce qui donne $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=t_0}$

Exercice n° 24

● $x\in IR, x+2\pi\in IR$ *et*

$$f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)-\sin(x+2\pi)$$
$$=\sin^2 x-\sin x=f(x)$$

Donc f est périodique de période $T=2\pi$

Par suite on étudie f sur $[-\pi,\pi]$

f est dérivable sur IR et on a :

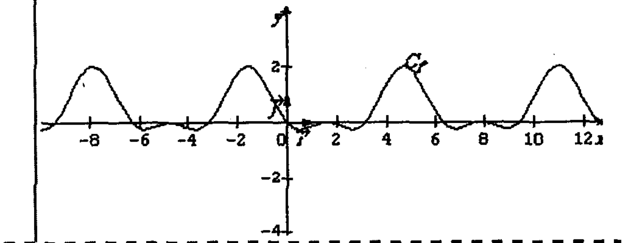
$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x\times(2\sin x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0$ *ou* $\sin x=\frac{1}{2}, x\in[-\pi,\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{6}$ *ou* $x=\frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

On trace C_f sur $[-\pi,\pi]$ puis la complète par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$



g(x)=cos(3x)cos²(x)

● $x \in IR, x+2\pi \in IR$ et

$g(x+2\pi)=\cos(3(x+2\pi))\cos^2(x+2\pi)$

$=\cos(3x+3\times 2\pi)\cos x = \cos 3x \cos^2 x = f(x)$

Donc g est périodique de période T = 2π

Aussi on a :

$x \in IR, -x \in IR$ et

$g(-x)=\cos(3(-x))\cos^2(-x)=\cos 3x \cos^2 x = g(x)$

Donc g est paire par suite on étudie f sur $[0,\pi]$

On construit C_g sur $[0,\pi]$ puis par symétrique par rapport à la droite des ordonnées on obtient le graphe de C_g sur $[-\pi,\pi]$ finalement on complète C_g par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$

- Etude des variations de g :

g est dérivable sur IR et on a :

$g'(x)=-3\sin 3x\cos^2 x-2\sin x.\cos x.\cos 3x$

Or on sait que : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ (*voir cours nombre complexe partie linéarisation)*

Donc :

$g(x)=(4\cos^3 x-3\cos x).\cos^2 x = 4\cos^5 x - 3\cos^3 x$

$\Leftrightarrow$

$g'(x)=-20\sin x.\cos^4 x+9\sin x.\cos^2 x$

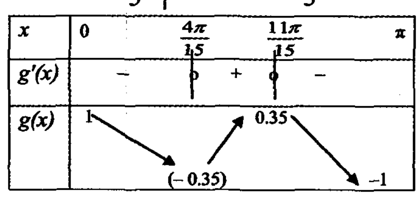
$=\sin x.\cos^2 x.(9-20\cos^2 x)$

Sur $[0,\pi]$ le signe de g'(x) est celui de $9-20\cos^2 x$

$9-20\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{9}{20} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$

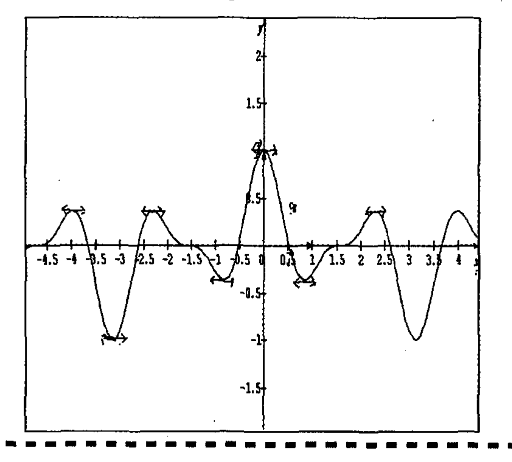
En utilisant une calculatrice on trouve :

$x \simeq 48° \simeq \frac{4\pi}{5}$ | $x \simeq 132° \simeq \frac{11\pi}{5}$



x	0		$\frac{4\pi}{15}$		$\frac{11\pi}{15}$		π
g'(x)		−	0	+	0	−	
g(x)	1	↘	(−0.35)	↗	0.35	↘	−1

Courbe de la fonction g :



Exercice n° 25

● a) $x \in$ IR , g dérivable car $x^2+1 \succ 0$

$$g'(x)=0+\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})}, \forall x \in IR$$

b) $g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})} \succ 0, \forall x \in IR$

x	−∞		+∞
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	2

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$ (0)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$ (0)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1+1=2$$

On a : $g(IR)=]0.2[\Rightarrow g(x) \succ 0$

● a) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$

$$x \in IR, f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)>0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x).(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=-1+\frac{1}{+\infty}=-1$$

la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

c)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]$$

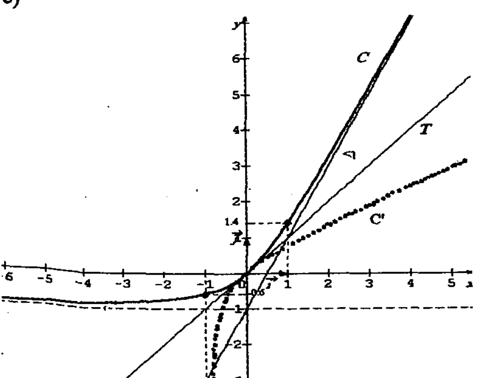
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Donc la droite $\Delta : y=2x-1$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow \boxed{T : y=x}$

c)



a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur l'intervalle

J= $g(IR)=\left]-1;+\infty\right[$

b) on a $f(1)=\sqrt{2}$ $\quad donc\ f^{-1}(\sqrt{2})=1$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

c) Voir repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice n° 1

- $$\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}{(i+\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})} = \frac{-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

- $(-1-i)^2.(1-i\sqrt{3}) = 2i(1-i\sqrt{3}) = 2i + 2\sqrt{3}$
- $\frac{1}{i} + i = -i + i = 0$
- $$(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2(i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(-\frac{1}{2})(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Donc : $\boxed{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = 1}$

Exercice n° 2

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1) ▪ $j^2 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

Formule de Moivre

Par suite on a : $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$

▪ $j^3 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^3 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

Formule de Moivre

Par suite on a : $j^3 = 1$

▪ $j^4 = j^3 \times j = 1 \times j = j$

2) Si $n = 3p$ alors $j^n = (j^3)^p = 1$, $p \in \mathbb{N}$

Si $n = 3p+1$ alors $j^n = j^{3p} \times j = j$, $p \in \mathbb{N}$

Si $n = 3p+2$ alors $j^n = j^{3p} \times j^2 = j^2 = \overline{j}$, $p \in \mathbb{N}$

● On a : $j^3 = 1$ donc $j^2 \times j = 1$ et par suite $j^2 = \frac{1}{j}$

Or d'après la question 1) on a $j^2 = \overline{j}$

il en résulte : $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$

● $1 + j + j^2 = 1 + (j + \overline{j}) = 1 + 2\text{Re}(j) = 1 + 2\times(-\frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$

● $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On sait que : $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^2 = -1 - j$ d'où

$a + bj + cj^2 = a + bj + c(-1-j) = a + bj - c - jc = a - c + (b-c)j$

Donc $a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c + (b-c)j = 0$

$\Leftrightarrow a - c = (c-b)j$

Exercice n° 3

$z = (m-i).[(10-m) + (2+m)i]$, $m \in \mathbb{R}$

● On a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

$z = m.(10-m) + m(2+m)i - i.(10-m) + 2 + m$
$= m.(10-m) + 2 + m + i.[m(2+m) - .(10-m)]$

Donc $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow m(2+m) - .(10-m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$

Résolution de l'équation : $m^2 + 3m - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4\times(-10) = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$

il y a deux valeurs du réel m tel que z est réel qui sont : $m_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$ et $m_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$

● pour $m = 2$ on a $z = 20$

Pour $m = -5$ on a $z = -78$

Exercice n° 4

$z_1 = 4+4i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

● $|z_1| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Soit θ un argument de z_1, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\boxed{|z_1| = 4\sqrt{2} \text{ et } \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{4}}$

De même on a :

$|z_2| = \sqrt{^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit θ un argument de z_2, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Donc : $\boxed{|z_2| = 2 \text{ et } \operatorname{Arg} z_2 = -\frac{\pi}{3}}$

● ▪ $(z_1)^2 = [4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]^2 = [(4\sqrt{2})^2, 2\text{x}\frac{\pi}{4}]$

$= [32, \frac{\pi}{2}]$

▪ $|z_1 \text{x} z_2| = |z_1| \text{x} |z_2| = 4\sqrt{2}\text{x}2 = 8\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg}(z_1 \text{x} z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ et $\operatorname{Arg}(\frac{1}{Z}) \equiv -\operatorname{Arg}(Z)\ [2\pi]$

Donc comme $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}}$ il résulte que :

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\operatorname{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Exercice n° 5

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $Z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi$

● $Z=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}Z = 0$ et $\operatorname{Im}Z = 0$

Donc Z est nul si et seulement si : $\cos^2\varphi = 0$ et $\sin\varphi.\cos\varphi = 0$ d'où $Z=0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Or comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on aura : $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

2) $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$

• Ecriture algébrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi.\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi.\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= 1 - i\,\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

Donc : $\boxed{\frac{1}{Z} = 1 - i\operatorname{tg}\varphi}$

• Ecriture trigonométrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = 1 - i\,\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} - i\,\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\varphi > 0$

D'où $\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]}$

- Ecriture exponentielle de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}e^{-i\varphi}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$$

Exercice n° 6

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = e^{i\theta} - i$ et $z_2 = e^{-i\theta} + i$

●

- $z_1 = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[-i\, 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \times 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$

Donc : $\boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

- On a : $z_2 = e^{-i\theta} + i = \overline{e^{i\theta} - i} = \overline{z_1}$

Donc : $\boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

Par suite on aura :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}} = e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

Finalement on a $\boxed{\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}$

● aff$(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = e^{i\theta} - i$

aff$(\overrightarrow{M_2M}) = z - z_2 = 2\cos\theta - (e^{-i\theta} + i)$

$= 2\cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) - i$

$= \cos\theta + i\sin\theta - i = e^{i\theta} - i = z_1$

Donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M}$ ce qui donne :
OM_1MM_2 est un parallélogramme (1)

Et comme $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right| = 1$ alors on a

$|z_1| = |z_2| \Rightarrow OM_1 = OM_2$ (2)

Conclusion : d'après les résultats (1) et (2) le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange

- OM_1MM_2 est un losange pour qu'il soit un carré
Il suffit que : (OM_1) et (OM_2) soient perpendiculaires

Donc on doit avoir : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_2})}{aff(\overrightarrow{OM_1})}$ imaginaire pur

Or $\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ est un imaginaire pur

Si et seulement si : $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\theta = -k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Pour k = 0 on aura $\boxed{\theta = 0}$

Exercice n° 7

M d'affixe z

● posons $z = x + iy$ on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Donc

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Conclusion : l'ensemble des points M tels que $|z| = |z-1|$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a : $|z|=|z-1| \Leftrightarrow |z-0|=|z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z|=|z-1| \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}$

Or on a: $\text{Arg}(z)+\text{Arg}(z-1) \equiv \text{Arg}[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2}+iy).(\frac{1}{2}+iy-1)$

$= (\frac{1}{2}+iy).(-\frac{1}{2}+iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $\text{Arg}(z)+\text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$|z|=|z-1| \Leftrightarrow \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\text{Arg}(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc $Z = \dfrac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \dfrac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow$ b – a = i (b' – a) $\Leftrightarrow$ b – a + ia = i b'
En multipliant la dernière égalité par (– i) on aura :

$$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow$ c' – a = i (c – a) $\Leftrightarrow$ c' = i c – ia + a

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1-i)}$



a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$
$= |i(c+b) - 2ia|$
$= |i| . |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$
$= \left|2\text{x}\left(\frac{b+c}{2} - a\right)\right|$
$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

B'C' = 2AM

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a-b-c)}{\frac{b+c-2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$
$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)$

z' est réel $\Leftrightarrow$ Z'=0 ou Argz' = k π ,k ∈ ℤ

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left[-i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + \text{Arg}\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right) = k\pi$ ou Z=1

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right|$

$= |-i| . \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si AM = BM
Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :
$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

- $|z| = |z-1| \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}$

Or on a: Arg (z)+Arg(z−1)≡Arg[z.(z − 1)] [2π]

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2} + iy).(\frac{1}{2} + iy - 1)$

$= (\frac{1}{2} + iy).(-\frac{1}{2} + iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z − 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : Arg (z)+Arg (z − 1) ≡ π [2π]

Conclusion :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Exercice n° 8

- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\text{Arg}(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Donc $Z = \dfrac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

- $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$

- $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

- $m = \dfrac{b+c}{2}$
- Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow b - a = i(b' - a) \Leftrightarrow b - a + ia = ib'$

En multipliant la dernière égalité par $(-i)$ on aura :

$$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow c' - a = i(c - a) \Leftrightarrow c' = ic - ia + a$

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1-i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c+b) - 2ia|$

$= |i| \cdot |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= \left|2 \times \left(\frac{b+c}{2} - a\right)\right|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

$B'C' = 2AM$

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a-b-c)}{\frac{b+c-2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$

$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)$

z' est réel $\Leftrightarrow Z' = 0$ ou $\text{Arg} z' = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left[-i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z=1$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + Arg\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right) = k\pi$ ou $Z=1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z=1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z=1$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z=1$

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right|$

$= |-i| \cdot \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si $AM = BM$ Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

a) $z \neq -i$, on a :

$z' + i = \frac{1-z}{1-iz} + i = \frac{1-z+i(1-iz)}{1-iz} = \frac{1-z+i+z}{1-iz}$

$= \frac{1+i}{(-i)(z+i)} = \frac{-1+i}{z+i}$

D'où $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) On a pour $z \neq -i$: $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

Donc $(z'+i)(z+i) = -1+i$

$\Leftrightarrow |(z'+i)(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'+i)|.|(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'-(-i)|.|z-(-i)| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(z'-z_B|.|z-z_B| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow BM'xBM = \sqrt{2}$

c) M décrit le cercle de centre B et de rayon 1

Signifie que : BM = 1 et comme BM'xBM = $\sqrt{2}$

Alors on aura BM' = $\sqrt{2}$ d'où le point M' décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

Exercice n° 11

- On sait que : $\cos 3x = Rel(e^{i3x})$

Or on a : $e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3$

$e^{i3x} = \cos^3 x + 3i\cos^2 x.\sin x - 3\cos x.\sin x - i\sin^3 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x.\sin x + i(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x)$

Donc : $\boxed{\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x.\sin x}$

- On sait que : $\sin 5x = Im(e^{i5x})$

Or on a : $e^{i5x} = (e^{ix})^5 = (\cos x + i\sin x)^5$

$e^{i5x} = \cos^5 x + 5i\cos^4 x.\sin x - 10\cos^3 x.\sin^2 x - 10i\cos^2 x.\sin^3 x + 5\cos x.\sin^4 x + i\sin^5 x$

Donc :

$\boxed{\sin 5x = 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x}$

$\cos^3 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3$

$= \frac{e^{i3x} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$

$= \frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Par suite :

$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$

- $\cos^2 x.\sin x = (1 - \sin^2 x).\sin x = \sin x - \sin^3 x$

or on a :

$\sin^3 x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3$

$= \frac{e^{i3x} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$

$= -\frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

D'où : $\cos^2 x.\sin x = \sin x - (-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x)$

$\boxed{\cos^2 x.\sin x = \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x)}$

- $\sin^2 x.\cos^3 x = (1-\cos^2 x).\cos^3 x = \cos^3 x - \cos^5 x$

on a déjà: $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Linéarisons : $\cos^5 x$

$\cos^5 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^5 =$

$\frac{e^{i5x} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-i5x}}{32}$

$= \frac{1}{16}.\frac{e^{i5x}+e^{-5ix}}{2} + \frac{5}{16}.\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{10}{16}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$= \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$

$\sin^2 x.\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x - (\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x)$

$= -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

$\alpha \in IR$ et $\beta \in IR$

$Z = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}$ est définit si $e^{i\alpha} - e^{i\beta} \neq 0$ c'est à dire

$e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$ donc pour $\alpha \neq \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

On a : $\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}} = \frac{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} + e^{-i(\frac{\alpha-\beta}{2})})}{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} - e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})})}$

$$=\frac{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})}+e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})}-e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}=\frac{2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{-2i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

Conclusion : $Z = i\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$; $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq k\pi$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) > 0$ alors :

$Arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = \cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) < 0$ alors :

$Arg(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = -\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

Exercice n° 12

$z_a = 1$, $z_B = -2i$ et $z' = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$

● $z' - 1 = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i} - 1$

$$=\frac{\bar{z}+4i-\bar{z}+2i}{\bar{z}-2i}=\frac{6i}{\bar{z}-2i}$$

● on a : $z' - 1 = \frac{6i}{\bar{z}-2i}$

$\Leftrightarrow Arg(z'-1) \equiv Arg(\frac{6i}{\bar{z}-2i})\ [2\pi]$

Comme $Arg(\frac{a}{b}) \equiv Arg\, a - Arg b\ [2\pi]$

alors

$Arg(z'-1) \equiv Arg(6i) - Arg(\bar{z}-2i)\ [2\pi]$

On sait que : $\overline{z+2i} = \bar{z}-2i$ donc on a

$Arg(z'-z_A) \equiv \frac{\pi}{2} - Arg(\overline{z+2i})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow Arg(z'-z_A) \equiv \frac{\pi}{2} + Arg(z+2i)\ [2\pi]$

Car $Arg\, \bar{a} \equiv -Arg(a)\ [2\pi]$

Il en résulte que :

$Arg(z'-z_A) - Arg(z-z_B) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow Arg(\frac{z'-z_A}{z-z_B}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

● a) $M \in \zeta(B, 3) \Leftrightarrow BM = 3$

$\Leftrightarrow |z - z_B| = 3 \Leftrightarrow |z+2i| = 3$

$\Leftrightarrow |\overline{z+2i}| = 3$ (car $|\bar{a}| = |a|$)

$\Leftrightarrow |\bar{z}-2i| = 3$

Or on a : $|z'-1| = \left|\frac{6i}{\bar{z}-2i}\right| = \frac{|6i|}{|\bar{z}-2i|}$

Donc $|z'-1| = \frac{6}{3} = 2$

Donc : $|z'-z_A| = 2$ par suite : $AM' = 2$

Conclusion : **L'ensemble des points M' est le cercle ζ ' de centre A et de rayon 2**

b) $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\quad k \in \mathbb{Z}$

$\in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AB}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Par suite : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **M' décrit la droite qui passe par A et perpendiculaire à La droite (AB)**

Exercice n° 13

$z_a = 1$ et $z' = 2z - z^2$

● on a pour $z \neq 0$:

$Arg(z') - 2\,Arg(z) \equiv Arg(z') - Arg(z^2)\ [2\pi]$

$\equiv Arg(\frac{z'}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv Arg(\frac{2z-z^2}{z^2})\ [2\pi]$

$Arg(z') - 2\,Arg(z) \equiv Arg(\frac{-z(z-2)}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv Arg(\frac{z-2}{z}) + \pi\ [2\pi]$

Donc on aura :

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z}\right) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

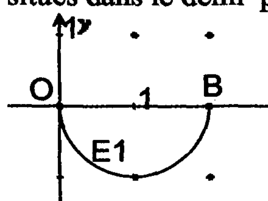
$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, posons B le point d'affixe 2

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z-z_B}{z-z_O}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Finalement l'ensemble E_1 des points M est le demi-cercle de diamètre[OB] privé de O et B situés dans le demi plan $y \leq 0$



● a) O,M_1 et M_2 sont alignéssi et seulement si : $\frac{aff\,(\overrightarrow{OM_1})}{aff\,(\overrightarrow{OM_2})}$ est réel

- si $z = 0$ alors $M_1 = M_2 = O$
- Si $z \neq o$ on aura: $\frac{z^2}{2z}$ est réel donc $\frac{z}{2}$ est réel

C'est-à-dire z est un réel par suite **l'ensemble E_2 des points M tels que O , M_1 et M_2 sont alignés est la droite des abscisses**

b) pour tout z non réel on a :

$\text{aff}(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = z^2$

$\text{aff}(\overrightarrow{M'M_2}) = z_2 - z' = 2z - (2z - z^2) = z^2$

D'où : $\text{aff}(\overrightarrow{OM_1}) = \text{aff}(\overrightarrow{M'M_2})$ donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M'M_2}$

Par suite OM_1M_2M' est un parallélogramme

Exercice n° 14

*Pour z = 1 le résultat est trivial

*Pour $z \neq 1$ Les points d'affixes respectives 1, z et z^2 *sont alignés signifie* $\frac{z^2-1}{z-1}$ est réel

$\Leftrightarrow \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ z-1 réel $\Leftrightarrow$ z réel

Conclusion : **l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z et z^2 sont alignés est la droite des abscisses.**

Exercice n° 15

Soient r et θ le module et l'argument de $1 - i\sqrt{3}$

On a :

$r = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$

D'où :

● $(1 - i\sqrt{3})^n = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^n$

$= 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

On a donc : $(1 - i\sqrt{3})^n$ est un réel positif si et seulement si : $\cos\frac{n\pi}{3} \geq 0$ et $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ d'où n est un multiple de 6

Exercice n° 16 **rectifier**

$Z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

● a) $Z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc $Z^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{2i\pi} = 1$

Par suite $Z^5 - 1 = 0$

b) on a : $Z^5 - 1 = (Z-1).(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

$Z \neq 1$ et $Z^5 - 1 = 0$ équvaut à: $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

● a) On sait : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
D'où

$$Z^4 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

$$Z^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$Z^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

b) d'après 2) a) on a : $Z^4 + Z = e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$$= e^{i\frac{10\pi}{10}}\left(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{-i\frac{3\pi}{5}}\right)$$

$$Z^4 + Z = e^{i\pi}\left(2\cos\frac{3\pi}{5}\right) = (-1).\,2\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= (-1).\,2\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Donc : $\boxed{Z^4 + Z = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$

De même on a :

$$Z^2 + Z^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{5}}\left(e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)$$

$$= e^{i\pi}\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right) = -2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Donc : $\boxed{Z^2 + Z^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$

● a) On sait que : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$

Donc : $1 + (Z + Z^4) + (Z^2 + Z^3) = 0$

Par suite en remplacent $(Z + Z^4)$ et $(Z^2 + Z^3)$ par les valeurs trouvées dans 2) b) on trouve :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0 \quad (\mathrm{I})$$

b) on sait que : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

d'où $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 2.\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

Donc remplacent $\cos\frac{4\pi}{5}$ par $2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ dans l'égalité (I) :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

Posons par suite $X = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ dans (II) on aura :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \quad \text{et} \quad X = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de : $4X^2 + 2X - 1 = 0$

c) Déterminant dans IR les solutions de l'équation
$4X^2 + 2X - 1 = 0$, en effet :

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - (-4) = 5 > 0$ donc il y en a deux racines : $X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$

On a $X' > 0$ et $X'' < 0$

Conclusion : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice n° 17

$z_a = i$, $z_B = \frac{1+i}{2}$ et $z' = (1-i)z - 1$

● a) $|z'| = |(1-i)z - 1| = \left|(1-i)\left(z - \frac{1}{1-i}\right)\right|$

$$= |1-i|\,.\left|z - \frac{1}{1-i}\right|$$

Avec : $|1-i| = \sqrt{2}$

Et $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = z_B$

Donc : $|z'| = \sqrt{2}\,.\,|z - z_B|$

Comme $|z'| = 2\sqrt{2}$ on aura
$|z - z_B| = 2$ c'est-à-dire $BM = 2$

Il en résulte que M décrit le cercle ζ de centre B et de rayon 2

b) $\theta \in [0, \pi]$

pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$,on a :

$z' = (1-i)z - 1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{i\theta} - 1$ et $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $z' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}e^{i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}\,e^{i\theta} - 1$

$$= e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} - 1$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\right)$$

$$= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}$$

$$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})} \quad (i = e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}$$

$$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$$

- Si : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{8} \le \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8} \le 0$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right) \le 0$ dans ce cas :

$z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}-\pi)}$ car $e^{-i\pi} = -1$

D'où $z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8})}$

- Si : $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$ alors $0 \le \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8} \le \frac{3\pi}{8}$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right) \ge 0$ dans ce cas :

$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$

Conclusion :

Si : $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$ alors

$$\boxed{z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\right)}$$

Si : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ alors

$$\boxed{z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8}\right)\right)}$$

● a) $M \ne B$

$\text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}[(1-i)z - 1] \quad [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}[(1-i).(z - \frac{1}{1-i})] \quad [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}[(1-i).(z - \frac{1+i}{2})] \quad [2\pi]$

voir 1) a))

$\equiv \text{Arg}(1-i) + \text{Arg}(z - z_B)\ [2\pi]$

$$Arg(z') \equiv -\frac{\pi}{4} + \left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$$

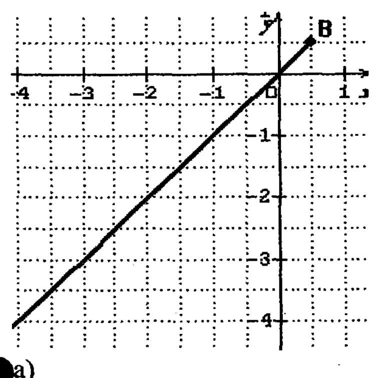
b) z' est un réel négatif donc $\text{Arg}(z') \equiv \pi\ [2\pi]$

ce qui donne $\left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right) - \frac{\pi}{4} \equiv \pi[2\pi]$

D'où $\left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

L'ensemble des points M noté F est la demi droite [Bt) tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{Bt}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Figure : Remarque :on a pour $z = 0$; $z' = -1$ donc l'*ensemble F est la demi droite* [BO)



● a)

- $M \ne A$

On a : $\frac{z'-z}{z_A - z} = \frac{(1-i)z - 1 - z}{i - z} = \frac{z - iz - 1 - z}{i - z}$

$$= \frac{-1 - iz}{i - z} = \frac{i(i - z)}{i - z} = i$$

(imaginaire)

Donc : $\frac{aff\,(\overrightarrow{MM'})}{aff\,(\overrightarrow{MA})}$ est un imaginaire pur par suite on aura $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{MA}$ ce qui donne que le triangle AMM' est rectangle en M

- $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z'-i}{z-i}\right)[2\pi]$

Or $\frac{z'-i}{z-i} = \frac{(1-i)z - 1 - i}{z - i} = \frac{z - i - iz - 1}{z - i}$

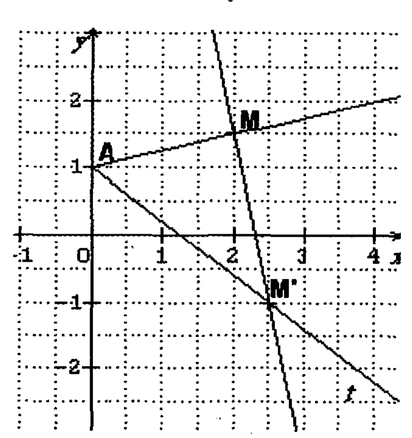
$$= \frac{z - i - i(z - i)}{z - i} = \frac{(z - i).(1-i)}{z - i} = 1 - i$$

Donc $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \text{Arg}(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) On trace la demi droite [At) tel que :

$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{At}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$,la perpendiculaire en M à la la droite (AM) coupe [At) en M'



Exercice n° 18 $z_A = i$; $z_B = 2$ $z' = \frac{z-i}{iz-2i}$

● a) $|z'| = \left|\frac{z-i}{iz-2i}\right| = \left|\frac{z-i}{i(z-2)}\right|$

$= \frac{|z-i|}{|i||z-2|} = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|i| = 1$

$= \frac{AM}{BM}$

b) lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB] alors $\frac{AM}{BM} = 1$ d'où $|z'| = 1$ ce qui donne OM' = 1 par suite **M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1**

● $z \neq i$ et $z \neq 2$

a) On a : $\text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{iz-2i}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{i(z-2)}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}.\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}\right) + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

Donc $\text{Arg}(z') \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z'-z_O) \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)\ [2\pi]$

D'où :

$(\vec{U},\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $M \in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $(\vec{U},\overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **Le point M' appartient à la droite des ordonnées**

Exercice n° 19 $M \in \zeta(O,1)$, aff (M) = t

● on a : $|t| = OM = 1$, donc $t = e^{i\alpha}$

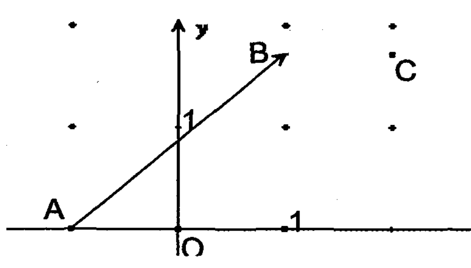
$u = t^3 = e^{i3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

$v = 2t = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

● a) pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$z_A = -1$, $z_B = 1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$

$z_C = v - u = z_B - z_A$ donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$



b) O, A et B sont alignés ssi : $\frac{aff\ (\overrightarrow{OA})}{aff\ (\overrightarrow{OB})}$ réel

Donc $\frac{z_A}{z_B} = \frac{u}{v} = \frac{t^3}{2t} = \frac{t^2}{2}$ est réel

Or $\frac{t^2}{2} = \frac{e^{2i\alpha}}{2}$ est réel ssi $2\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, or $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les points O , A et B sont alignés

Conclusion: O, A et B sont alignés pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

- $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a)

aff $(\overrightarrow{OC})$= z_C = w et aff $(\overrightarrow{AB})$ = v – u = w

Donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ par suite OABC est un parallélogramme

b) pour que OABC soit un rectangle il suffit que (OA) ⊥ (OC) donc : $\frac{aff\,(\overrightarrow{OC})}{aff\,(\overrightarrow{OA})}$ imaginaire

$\Leftrightarrow \frac{2t-t^3}{t^3} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (\frac{2}{t^2} - 1) \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow 2e^{-2i\alpha} - 1 \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow (2\cos 2\alpha - 1 - 2i\sin 2\alpha) \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow 2\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on aura $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$

Exercice n° 1

- $a = 3 - 4i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) = 3 \\ x^2 + y^2 = |a| = 5 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \mp 1$

D'où les racines carrées de $3 - 4i$ sont :

$b_0 = 2 - i$ et $b_1 = -2 + i$

- $a = 2i$

On a : $(1 + i)^2 = 2i$ par suite les racines carrées de $2i$ sont : $b_0 = 1 + i$ et $b_1 = -1 - i$

- $a = -5 - 12i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$

D'où les racines carrées de $(-5 - 12i)$ sont :

$b_0 = 2 - 3i$ et $b_1 = -2 + 3i$

- $a = \dfrac{2i - 1}{i + 2}$

Déterminons l'écriture algébrique de a :

$$a = \frac{2i - 1}{i + 2} = \frac{(2i - 1).(-i + 2)}{5} = \frac{2 + 4i + i - 2}{5} = i$$

Or on a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où les racines carrées de a sont

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où les racines carrées de a sont : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où les racines carrées de a sont :

$\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Exercice n° 2

- $a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 8$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 8$ Signifie $r = 2$

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

- $a = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2$ Signifie $r = \sqrt[3]{2}$ (voir analyse)

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{18}}$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{18}}$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{18}}$

- $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 1$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 1$ Signifie $r = 1$

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Exercice n° 3

a) On a : $(2 - i)^3 = 2^3 - 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 - i^3$
$= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$\boxed{(2 - i)^3 = 2 - 11i}$

Donc 2-i est une racine cubique de 2-11i

b) soit z tel que : $z^3 = 2 - 11i$

Or $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ d'où $\dfrac{z^3}{(2 - i)^3} = 1$ **(E)**

On posons $Z = \dfrac{z}{2 - i}$ l'équation **(E)**

Devienne $Z^3 = 1$ **(E')**

Z_0, Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E') sont les racines cubiques de l'unité soit donc :

$Z_0 = 1$, $Z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Il en résulte que z_0, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) vérifient :

* $\frac{z_0}{2-i} = Z_0 = 1 \Rightarrow \boxed{z_0 = 2-i}$

* $\frac{z_1}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_1 = (2-i)\,Z_1 = (2-i).\,(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z_1 = -1 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_1 = (-1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2}+\sqrt{3})}$

* $\frac{z_2}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_2 = (2-i)\,Z_2 = (2-i).\,(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z_2 = -1 - i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_2 = (-1-\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2}-\sqrt{3})}$

Exercice n° 4

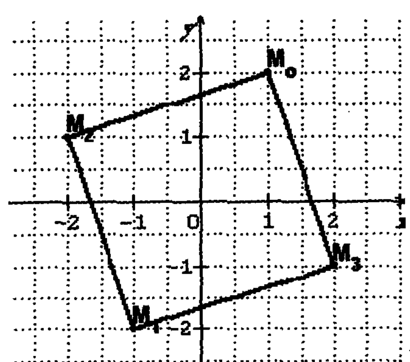
a) Un travail analogue à celui fait à l'ex 1 donne : les racines carrées de $-7-24i$ sont : $3-4i$ et $-3+4i$

les racines carrées de $3-4i$ sont : $2-i$ et $-2+i$

les racines carrées de $-3+4i$ sont : $1+2i$ et $-1-2i$

Donc **Les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont : $1+2i$; $-1-2i$; $-2+i$ et $2-i$**

b) Soient M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 les points d'affixes respectivement z_0, z_1, z_2 et z_3



$M_0M_2M_1M_3$ carré

Exercice n° 5

a) $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$

$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 9+12i-4-20-4i = -15+8i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-15 & (1) \\ x^2+y^2=17 & (2) \\ 2xy=8 & (3) \end{cases}$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=4$

Donc $\delta = 1+4i$ une racine carrée de Δ

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2+3i$$

$$Z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+2i-1-4i}{2} = 1-i$$

D'où $S_C = \{2+3i, 1-i\}$

b) $i z^2 - (4i-3)z + i - 5 = 0$

$\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -3-4i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1) \\ x^2+y^2=5 & (2) \\ 2xy=-4 & (3) \end{cases}$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=-2$

Donc $\delta = 1-2i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-4i+3-1+2i}{2i} = \frac{-2i+2}{2i} = -1-i$$

$$Z'' = \frac{-4i+3+1-2i}{2i} = \frac{-6i+4}{2i} = -3-2i$$

D'où $S_C = \{-3-2i, -1-i\}$

c) $(4-3i)z^2 - (10+5i)z + 3 + 5i = 0$

$\Delta = (10+5i)^2 - 4(4-3i).(3+5i)$
$= 100 + 100i - 25 - 4(27+11i) = -33 + 56i$

soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

On a $|\Delta| = \sqrt{(-33)^2+56^2} = \sqrt{4225} = 65$

On aura don le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-33 & (1) \\ x^2+y^2=65 & (2) \\ 2x.y=56 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2=32 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4$ ou $x=-4$

Pour $x=4$ l'éq (3) donne $y=7$

D'où : $\delta = 4+7i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{10+5i+4+7i}{2(4-3i)} = \frac{7+6i}{4-3i} = \frac{(7+6i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{28+21i+24i-18}{25} = \frac{2}{5}+\frac{9}{5}i$$

$$Z'' = \frac{10+5i-4-7i}{2(4-3i)} = \frac{3-i}{4-3i} = \frac{(3-i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{12+9i-4i+3}{25} = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{2}{5}+\frac{9}{5}i\,;\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i\right\}$

Exercice n° 6

a) $(z-2).(z^2-3iz+4) = 0$

$\Leftrightarrow z-2=0$ ou $z^2-3iz+4=0$

$\Leftrightarrow z_0=2$ ou $z^2-3iz+4=0$

- $z^2-3iz+4=0$:

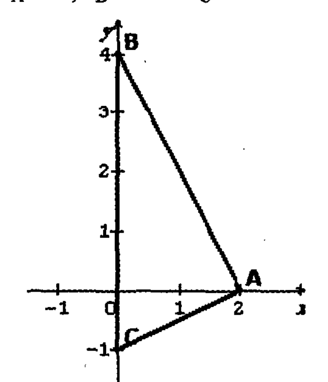
On a $\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 4 = -9-16 = -25 = (5i)^2$

Donc 5i est une racine carrée de Δ d'où les solutions de l'équation $z^2-3iz+4=0$ sont :

$z' = \frac{3i+5i}{2} = 4i$ et $z'' = \frac{3i-5i}{2} = -i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 4i, -i\}$

b) $z_A = 2$, $z_B = 4i$ et $z_C = -i$



On a : $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = 4i-2$

$aff(\overrightarrow{AC}) = z_c - z_A = -i-2$

$\frac{aff(\overrightarrow{AB})}{aff(\overrightarrow{AC})} = \frac{4i-2}{-i-2} = \frac{(4i-2)(i-2)}{5} = -2i$ imaginaire pure

Par suite (AB) et (AC) sont perpendiculaires d'où le triangle ABC est rectangle en A

Exercice n° 7 $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● a) $\Delta' = (1+i)^2 - .2i.\ (1+tg^2\theta)$

$= 2i - 2i - 2i\,tg^2\theta = -2i\,tg^2\theta = [(1-i)tg\,\theta]^2$

Donc $\delta = (1-i)tg\,\theta$

D'où :

$Z' = 1+i+(1-i)\,tg\,\theta$

$Z'' = 1+i-(1-i)\,tg\,\theta$

$S_{\mathbb{C}} = \{(1+i)+(1-i)tg\theta; (1+i)-(1-i)tg\theta\}$

● a) $a = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$b = 1+i\,tg\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

Donc $b = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ (car $\cos\theta > 0$)

b) * $Z' = (1+i)\left[1+\frac{1-i}{1+i}tg\theta\right]$,

or $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$. Par suite on aura :

$z' = (1+i)(1-i\,tg\,\theta) \Longrightarrow Z' = a\bar{b}$

* $Z'' = (1+i)\left[1-\frac{1-i}{1+i}tg\theta\right] = (1+i)(1+i\,tg\,\theta)$

$\Longrightarrow Z'' = ab$

c) $Z' = a\bar{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$Z'' = ab = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

Exercice n° 8

$\theta \in]0,\pi[$

$(E_\theta): z^2 - e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z + e^{i3\theta} = 0$

- $\Delta = \left[e^{i\theta}(1+e^{i\theta})\right]^2 - 4e^{3i\theta}$

$= \left[e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})\right] - 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}-4e^{i\theta})$

$= e^{2i\theta}(1+e^{2i\theta}-2e^{i\theta})$

$\Delta = (e^{i\theta})^2(1-e^{i\theta})^2 = \left[e^{i\theta}(1-e^{i\theta})\right]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(1-e^{i\theta})$ D'où :

$Z' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})+e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}+1-e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z' = e^{i\theta}}$

$Z'' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})-e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}-1+e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z'' = e^{2i\theta}}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, e^{2i\theta}\}$

- a) $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\theta} - 1|$

$BC = |z_C - z_B| = |e^{2i\theta} - e^{i\theta}|$

$BC = |e^{i\theta}(e^{i\theta}-1)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1}.|e^{i\theta}-1|$

$= |e^{i\theta}-1| = AB$

Donc le triangle ABC est isocèle de sommet B

b) Calculons la distance AC :

$AC = |z_C - z_A| = |e^{2i\theta}-1| = |(e^{i\theta}+1).(e^{i\theta}-1)|$

$= |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

On sait que ABC est isocèle de sommet B d'où pour que ce triangle soit équilatérale il faut que : AB = AC

Donc ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

Puisque $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} \neq 1$

Finalement ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}+1| = 1$

- a) $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ par suite

Le module de $(1 + e^{i\theta})$ est $2\cos\frac{\theta}{2}$ et un argument de $(1 + e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$

b) ABC est équilatéral si et seulement si $2\cos\frac{\theta}{2} = 1$

Donc $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

On aura alors :

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or $\theta \in]0,\pi[$ Donc :

pour que ABC soit équilatéral il faut que θ soit $\frac{2\pi}{3}$

Exercice n° 9

$(E): (1-i)z^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)z + 1 - i = 0$

1) On sait que dans l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ les solutions z_1 et z_2 vérifient $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

D'où on aura : $z_1 z_2 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i).(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow z_2 = \frac{i}{z_1} \Rightarrow |z_2| = \left|\frac{i}{z_1}\right| = \frac{|i|}{|z_1|} = \frac{1}{|z_1|}$

Et $\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(i) - \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(z_1)$

2) a)

- $1 - \sin 2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta.\cos\theta$

$= (\cos\theta - \sin\theta)^2$

- Résolution de l'équation (E) :

$\Delta' = (\cos\theta + \sin\theta)^2 - (1+i).(1-i)$

$= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 2\sin\theta.\cos\theta - 2$

$= \sin 2\theta - 1 = -(1 - \sin 2\theta)$

$= [i(\cos\theta - \sin\theta)]^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = i(\cos\theta - \sin\theta)$ d'où on aura :

$$z_2 = \frac{\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta}{1-i}$$
$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$
$$z_1 = \frac{\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta}{1-i}$$
$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On a $\theta \in]0, \pi[$ donc $\text{Im } z_1 > 0$

Donc $\boxed{z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } z_2 = \sin\theta + i\cos\theta}$

b) $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \implies z_1 = e^{i\theta}$

$z_2 = \sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\theta} \implies z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

c) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

car $\theta \in]0, \pi[$

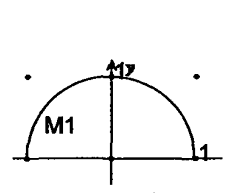
3) $\theta \in [0, \pi]$: et $\text{aff}(M_1) = e^{i\theta}$

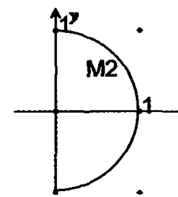
Donc M_1 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $y \geq 0$

$\text{aff}(M_2) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Donc M_2 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $x \geq 0$





Exercice n° 10 $\theta \in]0, \pi[$

● a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \underset{f.Moivre}{=} \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

- Résolution de l'équation

(E) : $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta = 0$

$\Delta' = 1 - (2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta$

$= \underbrace{\cos 2\theta}_{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} + \overbrace{i\sin 2\theta}^{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = \cos\theta + i\sin\theta$ d'où on aura :

$z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\text{Im } z' = \sin\theta \geq 0$
$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

b) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 - e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) a) $\frac{z''}{z'} = \frac{-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$, $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$= -i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -itg\frac{\theta}{2}$

Donc $\frac{aff(\overrightarrow{OM''})}{aff(\overrightarrow{OM'})}$ imaginaire pur ce qui prouve que le triangle OM'M" est rectangle en O

b) OM'M" est isocèle si et seulement si : OM' = OM"

$\Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$ et $tg\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

D'où $tg\frac{\theta}{2} = 1$ ce qui donne $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : OM'M" est isocèle si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$

3) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - 1 = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z' - 1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc IM' = 1 où I est le point d'affixe 1 ce qui prouve que le point M' vari sur le cercle C de centre I et de rayon 1

Exercice n° 11

$(E) : z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = 0$

● a) Soit x un réel,
x solution de (E) signifie

$x^3 - (6x^2 + 4ix^2) + (8+14i)x - 12i = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 - 6x^2 + 8x + i(-4x^2 + 14x - 12) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x = 0 (1) \\ -4x^2 + 14x - 12 = 0 (2) \end{cases}$$

On a va résoudre dans IR l'équation (2)

$-4x^2 + 14x - 12 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4\times(-4)\times(-12) = 196 - 192 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

Donc $x' = \dfrac{-14+2}{-8} = \dfrac{3}{2}$ et $x'' = \dfrac{-14-2}{-8} = 2$

Or 2 est solution de l'équation (1) et $\dfrac{3}{2}$ n'est pas une solution de l'équation (1)

Conclusion : **$z_0 = 2$ est une solution réelle de (E)**

b) 2 est une solution de (E) $\Rightarrow$

$$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = (z-2)(a.z^2 + b.z + c)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6-4i \\ c - 2b = 8+14i \\ -2c = -12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4-4i \\ c = 6i \end{cases}$$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z-2)(z^2 - (4+4i)z + +6i) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z - 2 = 0$ ou $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$

On va résoudre $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$ en effet :

$\Delta' = (2+2i)^2 - 6i = 4(1+i)^2 - 6i = 8i - 6i = 2i = (1+i)^2$

Donc $\delta = (1+i)$

Par suite $z' = 2+2i+1+i = 3+3i$
$z'' = 2+2i-1-i = 1+i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 3+3i, 1+i\}$

● $z_A = 2$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 3+3i$

a) Calculons les distances AB , AC et BC :

$AB = |z_B - z_A| = |1+i-2| = |-1+i| = \sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = |3+3i-2| = |1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |3+3i-1-i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

On remarque que :

$2 + 8 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 10$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B

b) Pour que ABCD soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme car ABC est rectangle en B, on aura donc :

$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(\overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A = 3+3i-1-i-2 = 2i$

Donc $\boxed{z_D = 2i}$

● a) On a : $\dfrac{z'-z_B}{z-z_B} = \dfrac{2iz+3-i-1-i}{z-1-i}$

$= \dfrac{2iz+2-2i}{z-1-i}$

$= \dfrac{2i(z-1-i)}{z-1-i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) On a : $\text{Arg}\left(\dfrac{z'-z_B}{z-z_B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{MB}\right)$

$\equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où (BM') $\perp$ (BM) ce qui prouve que le triangle BMM' rectangle en B

Exercice n° 12

(E):z^3-(6+3i)z^2+(9+12i)z-9(2+3i)=0

● a) remplaçant dans l'équation (E) z par 3i on aura :

$(3i)^3 - (6+3i)(3i)^2 + (9+12i)(3i) - 9(2+3i)$
$= -27i + 54 + 27i + 27i - 36 - 18 - 27i$
$= 54i - 54i + 54 - 54 = 0$

d'où 3i est une solution de (E)

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = (z-3i)(z^2 - 6z + 9 - 6i)$
$= z^3 - 6z^2 + 9z - 6iz - 3iz^2 + 18iz - 27i - 18$
$= z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$ donc

(E) est équivalente à l'équation $(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0$

● a) $u^2 = 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $u = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $u = -\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{3} + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right\}$

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0 \Leftrightarrow$

$(z-3i) = 0$ Ou $(z-3)^2 - 6i = 0 \Leftrightarrow$

$z = 3i$ ou $z - 3 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ *ou* $z - 3 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Par suite les solutions sont : $z_0 = 3i$, $z_1 = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

● a) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |-\sqrt{3}(2+2i)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = |\sqrt{3}+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-\sqrt{3})|$

$= \sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-3)^2}$

$= \sqrt{9+6\sqrt{3}+3+3-6\sqrt{3}+9} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = |3-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)|$

$= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+3)^2}$

$= \sqrt{9-6\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

D'où $M_1M_2 = M_0M_2 = M_0M_1$ et par suite le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral

b) puisque le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral alors le centre de centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité et par suite :

$z_I = \dfrac{z_0+z_1+z_2}{3} = \dfrac{3i+3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}$

Donc $\boxed{z_I = 2+i}$

Exercice n° 13

: $z^3 + (\sqrt{3}+i)z^2 + (1+i\sqrt{3})z + i = 0$

● $(-i)^3 + (\sqrt{3}+i)(-i)^2 + (1+i\sqrt{3})(-i) + i$

$= i - \sqrt{3} - i - i + \sqrt{3} + i = 0$

D'où $(-i)$ est une solution de (E)

(E) est équivalente à l'équation $(z+i)\left[z^2+az+b\right]=0$

En développent et par identification on trouve

$a = \sqrt{3}$ et $b = 1$

donc les solutions de (E) sont les solutions de l'équation

$(z+i)(z^2+\sqrt{3}z+1) = 0 \Leftrightarrow$

$(z+i) = 0$ Où $(z^2+\sqrt{3}z+1) = 0$

On va résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+\sqrt{3}z+1 = 0$

$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4 = -1 = i^2 \Longrightarrow \delta = i$ d'ou $z' = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

et $z'' = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2} \Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-i, z', z''\}$

● a) $z_A = -i$, $z_B = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$

Donc : OB = 1 et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\,[2\pi]$ et $C = S_{(o,\vec{i})}(B)$

b) $Z = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{z_B - \overline{z_B}}{-i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i} = \dfrac{2i\,\mathrm{Im}\,z_B}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i}$

$Z = \dfrac{2i.\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}-i).\frac{1}{2}} = \dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}$

Donc $|Z| = \left|\dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \dfrac{|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\mathrm{Arg}Z \equiv \mathrm{Arg}\left(\dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathrm{Arg}(2i) - \mathrm{Arg}(\sqrt{3}-i)[2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

Conclusion : $\boxed{Z = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right]}$

c) $|Z| = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \dfrac{CB}{CA} = 1$

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal C

Exercice n° 14

$f(x) = (x)^3 + 2(i-\sqrt{3})(x)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(x) + 8i$

1) Cherchons $x \in$ IR* tel que $f(ix) = 0$, en effet :

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow$

$(ix)^3 + 2(i-\sqrt{3})(ix)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(ix) + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$-ix^3 - 2ix^2 + 2\sqrt{3}x^2 + 4ix + 4\sqrt{3}x + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{3}x(x+2) + i(-x^3 - 2x^2 + 4x + 8) = 0$

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}(x+2) = 0 \\ -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Donc :

$z_0 = -2i$ est une racine imaginaire pure de $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2+az+b) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 + (a+2i)z^2 + (b+2ia)z + 2ib = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2i = 2i - 2\sqrt{3} \\ b+2ia = 4-4i\sqrt{3} \\ 2ib = 8i \end{cases} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$

D'où $f(z)=0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z+2i=0$ Ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

*Résolution de l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta' = \sqrt{3}^2-4=-1=i^2$ Donc $\delta=i$

Par suite : $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{-2i,\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i\right\}$

● a) $w=\dfrac{z_1}{z_0}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i).i}{(-2i).i}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $\text{aff}(\overrightarrow{OM})=z$

$\text{aff}(\overrightarrow{M_2M_1})=wz-w^2z=z.(w-w^2)=z(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}})$

$=z.(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=z$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_2M_1} \Longrightarrow OMM_1M_2$ est un parallélogramme (1)

Aussi on a : $OM=|z|$

$OM_2=|wz|=|z|\,|w|=|z|$

D'où $OM=OM_2$ (2)

(1) + (2) donne : OMM_1M_2 est un losange

Exercice n° 15 $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$(E):(1+iz)^3(1-itg\theta)=(1-iz)^3(1+itg\theta)$

● a) z solution de (E) $\Leftrightarrow$

$(1+iz)^3.(1-itg\,\theta)=(1-iz)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow |(1+iz)^3|\,|1-itg\,\theta|=|(1-iz)^3|\,|1+itg\,\theta|$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}=|1-iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3=|1-iz|^3 \Leftrightarrow \boxed{|1+iz|=|1-iz|}$

b) posons $z=x+iy$; $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow |1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$

$\Leftrightarrow |1-y+ix|=|1+y-ix|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2}$

$\Leftrightarrow (1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$

$\Leftrightarrow (1-y)^2=(1+y)^2$

$\Leftrightarrow -2y=2y \Leftrightarrow y=0$

Donc $|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z$ est réel

● a) $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\frac{\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\cos2\theta+i\sin2\theta}$

b) $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ posons $z=tg\,\alpha$ et remplaçant z dans l'équation (E) on aura pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$(1+i\,tg\,\alpha)^3.(1-itg\,\theta)=(1-i\,tg\,\alpha)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow$

$(\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha})^3=\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta} \Leftrightarrow (e^{2i\alpha})^3=e^{2i\theta}$

$\Leftrightarrow e^{6i\alpha}=e^{2i\theta} \Leftrightarrow 6\alpha=2\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

On sait que $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

donc :

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{6}\prec-\dfrac{\theta}{3}\prec\dfrac{\pi}{6}\ (1)\\ -\dfrac{\pi}{2}\prec\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{\pi}{2}\ (2)\end{cases}$$

(1) + (2) $\Longrightarrow -\dfrac{2\pi}{3}\prec\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow -2<k<2$

D'où $k\in\{-1,0,1\}$ on a alors pour :

- $k=0 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}$
- $k=1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3}$
- $k=-1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3}$

Finalement : $S_{\mathbb{C}}=\left\{tg\,\dfrac{\theta}{3};tg(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3});tg(\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3})\right\}$

Exercice n° 16

● les racines cubiques de u sont les solutions de :

$z^3=u$ Or $u=4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow z_k=2\,e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $k\in\{0,1,2\}$

Donc les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$ sont :

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_1 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

● $\theta \in]0,\pi[$

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{[(1-\cos\theta)-i\sin\theta].[(1-\cos\theta)+i\sin\theta]}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{[1-\cos\theta]^2+[\sin\theta]^2} = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\theta)} + i\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\left[1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\right]} = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2}(1+i\cot g\frac{\theta}{2}),\ \theta \in]0,\pi[}\ (**)$$

● $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i).z^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{z}\right)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = u$$

d'après la question 1) on aura :

$\frac{2z-1}{z} = z_k \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-z_k}$

D'où les solutions de l'équation (E) sont

- $z_0' = \frac{1}{2-z_0} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Remplacer θ par $\frac{\pi}{4}$ dans (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_0' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{\pi}{8})}$$

- $z_1' = \frac{1}{2-z_1} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{11\pi}{12}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

Remplacer θ par $\frac{11\pi}{12}$ dans (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_1' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{11\pi}{24})}$$

- $z_2' = \frac{1}{2-z_2} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{19\pi}{12}}}$

Remplacer θ par $\frac{19\pi}{12}$ dans (**)

$$\Longrightarrow z_2' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{19\pi}{24})$$

Exercice n° 17

: rectifier $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

● a) $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$, on a

- $|1+i| = \sqrt{2}$

Soit θ un argument de 1 + i : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ Par suite $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\lambda = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$

$\Longrightarrow \lambda = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})}$$

b) Déterminons l'écriture cartésienne de λ :

$\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}$

$\lambda = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

Donc $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

● • $z^3 = a \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie r =

Donc les racines cubiques de a sont :

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

- $z^3 = \bar{a} \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k' = r\, e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $k \in \{0,1,2\}$

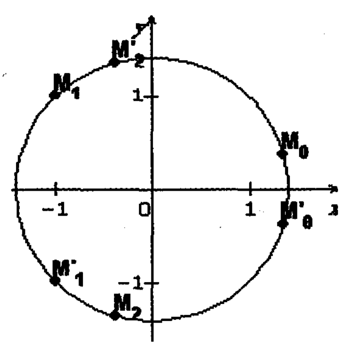
On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie $r = \sqrt{2}$

Donc les racines cubiques de $\bar{a}$ sont :

$z_0' = \overline{z_0} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_1' = \overline{z_1} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

et $z_2' = \overline{z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

- Construction des points M_0, M_1, M_2, M_0', M_1' et M_2' affixes des solutions trouvées :



● $P(z) = z^6 - 4z^3 + 8$

a) z_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \rho(z_0) = z_0^6 - 4z_0^3 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z_0^6 - 4z_0^3 + 8 = 0} \Leftrightarrow \overline{z_0}^6 - 4\overline{z_0}^3 + 8 = 0$

Donc $\overline{z_0}$ est une solution de (E)

b) Posons $Z = z^3$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 4Z + 8 = 0 \\ Z = z^3 \end{cases}$$

Résolution de : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \Longrightarrow \delta = 2i$

D'où $Z' = 2 + 2i$ ou $Z'' = 2 - 2i$

Ce qui donne : $z^3 = 2 + 2i = a$ ou bien $z^3 = 2 - 2i = \bar{a}$

D'après la question 2)

$$S_C = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right\}$$

4) On a :

$(z - z_0).(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_0)z + |z_0|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2$

De même :

$(z - z_1).(z - \overline{z_1}) = z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1\overline{z_1}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_1)z + |z_1|^2$

$= z^2 + 2z + 2$

$(z - z_2).(z - \overline{z_2}) = z^2 - (z_2 + \overline{z_2})z + z_2\overline{z_2}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_2)z + |z_2|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2$

$P(z) =$

$(z - z_0).(z - \overline{z_0})(z - z_1).(z - \overline{z_1})(z - z_2).(z - \overline{z_2})$

$= (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)(z^2 + 2z + 2)(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

$P(z) = (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)(z^2 + 2z + 2)(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

Exercice n° 18

$\theta \in [-\pi, \pi[$

(E) : $iz^2 + (2\sin\theta)z - 2i(1 + \cos\theta) = 0$

● a) **rectifier** $\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

On a $\forall\ \theta \in [-\pi, \pi[$:

$\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = 1 - \cos^2\theta - 2 - 2\cos\theta$

$= -\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1$

$= -(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1)$

$= -(1 + \cos\theta)^2$

b) Résolution de l'équation (E)

$\Delta' = \sin^2\theta - (-2i)i(1 + \cos\theta)$

$= \sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

$\Rightarrow \delta' = i(1 + \cos\theta)$

D'où $z' = \dfrac{-\sin\theta + i(1+\cos\theta)}{i} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \dfrac{-\sin\theta - i(1+\cos\theta)}{i} = -1 - \cos\theta + i\sin\theta$

● a)

$-\overline{z'} = -\overline{\left[(1+\cos\theta) + i\sin\theta\right]} = -\left[(1+\cos\theta) - i\sin\theta\right]$

$= -(1+\cos\theta) + i\sin\theta = z''$

Par suite aff (M") = $-\overline{\text{aff (M')}}$: donc M' et M" sont symétrique par rapport à la droite des ordonnées $(O, \vec{v})$

b)

$* \; z' = 1+\cos\theta+i\sin\theta = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos(\frac{\theta}{2})$

puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où

$$z' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

(Pour $\theta = -\pi$: $z' = 0$)

$* \; \forall\, \theta \in]-\pi,\pi[$:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{-\overline{z'}}{z'} = \frac{-2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$$

c)

- $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|e^{i(\pi-\theta)}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|z''|}{|z'|} = \frac{OM''}{OM'} = 1 \Leftrightarrow OM'' = OM'$ ce qui prouve que le triangle OM'M'' est isocèle en O

- le triangle OM'M'' est équilatéral

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM''},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Leftrightarrow Arg\frac{z''}{z'} \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi-\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\pi-\theta = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $\theta \in [-\pi,\pi[$

Conclusion : $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice n° 19

$\theta \in]0;\pi[$

(E) : $z^3+4z^2+\left(5-e^{2i\theta}\right)z-4i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$

● a) On sait que : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

Donc : $1+2i\sin\theta e^{i\theta} = 1+(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{i\theta}$

$= 1+e^{2i\theta} - \underbrace{e^{-i\theta}e^{i\theta}}_{=1}$

$\Longrightarrow 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

$\Longrightarrow e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1+2i\sin\theta e^{i\theta}$

b)

$* \; (-2)^3+4(-2)^2+(5-e^{2i\theta})(-2)-4i\sin\theta.e^{i\theta}$

$= -8+16-10+2e^{2i\theta} - 4i\sin\theta\, e^{i\theta}$

$= -2+2e^{2i\theta} - 2\,(2i\sin\theta)e^{i\theta} = A$

Or d'après 1) a) : $2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}-1$

Donc : $A = -2+2e^{2i\theta}-2\,(e^{2i\theta}-1)$

$= -2+2e^{2i\theta}-2\,e^{2i\theta}+2 = 0$

D'où (– 2) est une solution de (E)

* résolution de l'équation (E) :

(E) est équivalente à l'équation $(z+2)\left[z^2+az+b\right] = 0$

$\Leftrightarrow z^3+(a+2)z^2+(b+2a)z+2b = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=4 \\ b+2a = 5-e^{2i\theta} \\ 2b = -4i\sin\theta e^{i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b = -2i\sin\theta e^{i\theta} \end{cases}$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z+2)(z^2+2z-2i\sin\theta.e^{i\theta}) = 0$

$\Leftrightarrow$

$(z+2) = 0$ Où $(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

$\Delta' = 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2 \Longrightarrow \delta = e^{i\theta}$

D'ou $z_1 = -1+e^{i\theta}$, $z_2 = -1-e^{i\theta}$

$\Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{-2, -1+e^{i\theta}, -1-e^{i\theta}\right\}$

● a)

$* \; z_1 = -1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$$

$* \; \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+e^{i\theta}}{-1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})}{-e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -i\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$, or $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} > 0$ et par suite : $\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

b) On a $\frac{z_1+z_2}{2} = -1 = z_I$

Conclusion $\forall\, \theta \in]0,\pi[$, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point I avec $z_I = -1$

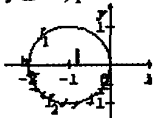
c) Ensemble Γ_1 des points M_1 :

On a : $z_1 = -1+e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - (-1) = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow IM_1 = 1$ et $\theta \in]0, \pi[$

Donc l'ensemble Γ_1 des points M_1 est le demi – cercle de centre I et de rayon 1 privé de A et O situés dans le demi plan $y \geq 0$

Puisque $S_I(M_1) = M_2$,on en déduit que Γ_2 est le demi cercle de centre I et de rayon 1 situés dans le demi plan $y \leq 0$, privé de A et O



d) I milieu du segment $[M_1M_2]$ et I est le milieu du segment [OA] car : $\frac{z_A+z_O}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 = z_I$

Donc $[M_1M_2]$ et [OA] ont même milieu ce qui prouve que le quadrilatère OM_1AM_2 est un parallélogramme (1)

Aussi on a : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})} = \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$ imaginaire pur donc $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ (2)

(1) + (2) donne : OM_1AM_2 est un rectangle

- Pour que OM_1AM_2 soit un carré il suffit que :

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$, or $tg\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $\left|tg\frac{\theta}{2}\right| = tg\frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, comme $\theta \in]0, \pi[$

Alors pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: OM_1AM_2 est un carré

Exercice n° 20 $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

a)

- $z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $z_1 = = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$|z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $Arg(z_1) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

- $z_2 = 1 - e^{3i\theta} =$

$e^{i\frac{3\theta}{2}}(e^{-i\frac{3\theta}{2}} - e^{i\frac{3\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{3\theta}{2}e^{i\frac{3\theta}{2}}$

Comme $\frac{3\theta}{2} \in]0, \frac{3\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{3\theta}{2} > 0$

D'où $z_2 = = 2\sin\frac{3\theta}{2}e^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$|z_2| = 2\sin\frac{3\theta}{2}$ et $Arg(z_2) \equiv \frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) On a : $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$

Posons $a = 1$ et $b = e^{i\theta}$ donc $a^3 = 1$ et $b^3 = e^{3i\theta}$

D'où : $\frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow |z_3| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \Leftrightarrow |z_3| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$

$\Rightarrow |z_3| = \frac{2\sin\frac{3\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

Aussi on a : $Arg(z_3) \equiv Arg(z_2) - Arg(z_1)[2\pi]$

$\equiv (\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) - (\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})[2\pi]$

$\equiv \theta[2\pi]$

Conclusion : $Arg(z_3) \equiv \theta[2\pi]$ et $|z_3| = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

- $(E_\theta): z^2 - (2+e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$

$\Delta = (2+e^{2i\theta})^2 - 4(1-e^{3i\theta})$

$= 4 + 4e^{2i\theta} + e^{4i\theta} - 4 + 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(4 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(2+e^{i\theta})^2$

$= [e^{i\theta}(2+e^{i\theta})]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(2+e^{i\theta}) = 2e^{i\theta} + 2e^{2i\theta}$

D'où

$z' = \frac{2+e^{2i\theta}+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = z_3$

$$\Longrightarrow z' = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\theta}$$

$$z'' = \frac{2 + e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} - e^{2i\theta}}{2} = 1 - e^{i\theta} = z_1$$

$$\Longrightarrow z'' = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

Exercice n° 21 $\alpha \in]0;\pi[$

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$

● a) $P(1) = 1 - (1-2\sin\alpha) + 1 - 2\sin\alpha - 1$
$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$

b) On a P (1) = 0 donc

w = 1 est une racine de P (z) = 0

D'où $P(z) = (z-1)(a.z^2 + b.z + c)$
$= a.z^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Par identification membre à membre on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 + 2\sin\alpha \Rightarrow b = 2\sin\alpha \\ c - b = 1 - 2\sin\alpha \\ -c = -1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Donc P(z)=0 $\Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2\sin\alpha z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ z − 1 = 0 ou $z^2 + 2\sin\alpha z + 1 = 0$

On va résoudre $z^2 + 2\sin\alpha z + 1 = 0$ en effet :

$\Delta' = \sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha = (i\cos\alpha)^2$ Donc $\delta' = i\cos\alpha$

Par suite $z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z'' = -\sin\alpha - i\cos\alpha = \overline{z'}$

Donc : P (z) = 0 $\Leftrightarrow$ z = 1 = w, z = z' et z = z''

$$S_{\mathbb{C}} = \{1, -\sin\alpha + i\cos\alpha, -\sin\alpha - i\cos\alpha\}$$

- $w = 1 = e^{i0}$

$z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$z'' = \overline{z'} = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

● $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u_k = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\}$

$\Leftrightarrow u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$, $u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$ et $u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

● $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

● Posons $Z = (z-1)^3$ donc l'équation :
$(z-1)^6 + 2\sin\alpha(z-1)^3 + 1 = 0$ est équivalente à

$$\begin{cases} Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0 \\ Z = (z-1)^3 \end{cases}$$

Or les solutions de l'équation $Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0$ sont d'après 1) b) $Z' = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, $Z'' = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

par suite on aura :

$(z-1)^3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ ou $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

D'après 2) on trouve :

* $z_0 - 1 = u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})} \Rightarrow z_0 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow z_0 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12})}$$

* $z_1 - 1 = u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})} \Rightarrow z_1 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow z_1 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12})}$$

* $z_2 - 1 = u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow z_2 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

$$\Longrightarrow z_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4})}$$

On a : $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \overline{(u^3)} = \overline{u}^3 = \overline{e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}} = e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

Donc si u_k est une racine cubique de $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ alors $\overline{u_k}$ est une racine cubique de $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

D'où l'équation $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ donne
$z_3 = \overline{z_0}$, $z_4 = \overline{z_1}$ et $z_5 = \overline{z_2}$

Conclusion :

$$S_{\mathbb{C}} = \{z_0, z_1, z_2, \overline{z_0}, \overline{z_1}, \overline{z_2}\}$$

Exercice n° 22 $z^2-(1+i)z+i=0$

● On a : a + b + c = 0 donc z' = 1 et $z'' = \frac{c}{a} = i$

$S_{\mathbb{C}}=\{1 ;i\}$

● $E_\theta : z^2-\left(2e^{i\theta}\cos\theta\right)z+e^{2i\theta}=0$

a) Remplaçant z par 1 dans l'équation (E_θ):

$1-2e^{i\theta}\cos\theta+e^{2i\theta}=1-2e^{i\theta}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)+e^{2i\theta}$

$=1-\underbrace{e^{i\theta}.e^{i\theta}}_{e^{2i\theta}}-\underbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{1}+e^{2i\theta}=0$

D'où 1 est une racine de (E_θ)

b) On sait que si z' et z" sont les solutions de

l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $z'.z''=\frac{c}{a}$

Donc : $1\text{x}.z''=\frac{e^{2i\theta}}{1} \Longrightarrow \boxed{z''=e^{2i\theta}}$

● a) $z_B=e^{2i\theta} \Leftrightarrow |z_B|=|e^{2i\theta}|=1$ et <u>2θ ∈] 0, π [</u>

Donc OB = 1 par suite l'ensemble des points B est le demi Cercle trigonométrique privé des points A et $S_O(A)$ situés dans le demi plan $y \geq 0$

b) OACB est un losange si et seulement si OACB est un parallélogramme car OA = OB

On aura dans ce cas : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_A=z_C-z_B$

$\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B \Leftrightarrow \boxed{z_C=1+e^{2i\theta}}$

c) l'aire du losange OACB est égal à $\mathcal{A}=\frac{OC.AB}{2}$

Donc $\mathcal{A}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ OC.AB= 1 $\Leftrightarrow |z_C|.|z_B-z_C|=1$

$\Leftrightarrow |(1+e^{2i\theta}).(e^{2i\theta}-1)|=|e^{4i\theta}-1|=1$

$\Leftrightarrow |e^{2i\theta}.(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})|=\underbrace{|e^{2i\theta}|}_{1}.|2i\sin2\theta|=1$

$\Leftrightarrow |2\sin2\theta|=1$ et <u>2θ ∈] 0, π [</u>

Donc $2\sin2\theta=1 \Leftrightarrow \sin2\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow$

$\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ et Comme θ ∈] 0 , $\frac{\pi}{2}$ [on trouve :

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{12} \text{ ou } \theta=\frac{5\pi}{12}}$$

Exercice n° 23

● a) $z^2-2iz-2=0$

$\Delta'=i^2+2=-1+2=1$ Donc δ =1

Par suite z' = 1+ i ; z" = – 1 + i $S_{\mathbb{C}}=\{1+i ;-1+i\}$

b) $z'=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z''=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

● θ ∈] 0, π [

$(E): z^2-2e^{i\theta}.z+e^{2i\theta}-1=0$

$\Delta'=(e^{i\theta})^2-(e^{2i\theta}-1)=e^{2i\theta}-e^{2i\theta}+1=1$ Donc δ =1

Les solutions donc sont : $z'=1+e^{i\theta}$; $z''=-1+e^{i\theta}$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1+e^{i\theta},-1+e^{i\theta}\}$$

●

or on a : $\cos\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_2=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$z_3=-1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})=2i\sin\frac{\theta}{2}e$

or on a : $\sin\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_3=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

b) On a : $\frac{z_B+z_C}{2}=e^{i\theta}=\frac{z_O+z_A}{2}$ d'où les segments [BC] et [OA] ont même milieu ce qui prouve que OBAC est un parallélogramme

OA = $|z_1|=2$

BC = $|z_C-z_B|=|-1+e^{i\theta}-1-e^{i\theta}|=|-2|=2$

OA = BC donc les diagonales du parallélogramme OBAC sont isométriques d'où c'est un rectangle

c) OBAC est un carré si et seulement si : OB =OC

$\Leftrightarrow |z_B|=|z_C| \Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow tg\frac{\theta}{2}=1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Puisque θ ∈] 0 , π [on trouve $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 1

a) $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{2}{3}=\frac{b}{1}$

Donc $a=\frac{8}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$

b) $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -2\alpha-12=0$ et $0+2\beta=0$

$\Leftrightarrow \alpha=-6$ et $\beta=0$

c) $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{-5}{-3}=\frac{\lambda}{2}=\frac{\mu}{1} \Rightarrow \lambda=\frac{10}{3} et\, \mu=\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{10}{3}$ et $\mu=\frac{5}{3}$

Exercice n° 2

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$=1\times\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=13-0-30=-17\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

b) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$=-6+21-2=13\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

c) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$=10+3+1=14\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice n° 3

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

D'où (AB) et (CD) sont non parallèles (1)

- $(AB):\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$, $\alpha \in$ IR

- $(CD):\begin{cases} x=-\beta \\ y=0 \\ z=3+2\beta \end{cases}$, $\beta \in$ IR

$M\in(AB)\cap(CD) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha=-\beta \ (1) \\ -1-\alpha=0 \ (2) \\ 1+\alpha=3+2\beta \ (3) \end{cases}$ $(\alpha,\beta)\in$ IR

(1) et (2) donne $\alpha=-1$ et $\beta=0$

Or d'après (3) : $0=3$ impossible

Donc $(AB)\cap(CD)=\varnothing$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ (AB) et (CD) sont non coplanaires

<u>Conclusion</u> : **(AB) et (CD) sont non coplanaires**

Exercice n° 4

● a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{-1}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}):\begin{cases} x=1-2\alpha+4\beta \\ y=\alpha-\beta \\ z=2+2\alpha \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\Re^2$

c) On a : $x + z = 3 + 4\beta$ et $2\alpha = z - 2$

Donc $4\beta = x + z - 3$ et $2\alpha = z - 2$
D'ou

$4y = 4\alpha - 4\beta = 2z - 4 + 3 - x - z$.

$\Rightarrow x + 4y - z + 1 = 0$

Finalement

$P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) : x + 4y - z + 1 = 0$

● a) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ A(1,0,2)

$(AD) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathfrak{R}$

b) Remplaçons les coordonnées du point D dans l'équation cartésienne du plan P : on aura :
$2 + 4 \times 3 - 3 + 1 = 12 \neq 0$

Donc $D \notin P$ et par suite la droite (AD) et le plan P sont sécants en A.

Exercice n° 5

● $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ A(1,1,4)

une équation paramétrique du plan P est :

$P : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta & (1) \\ y = 1 + 3\alpha - \beta & (2) \\ z = 4 - \alpha - 2\beta & (3) \end{cases}$ $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$

$(1)+(2) \Rightarrow \alpha = x+y-1 \Rightarrow \beta = x-1+2(x+y-1) = 3x+2y-3$

$(3) \Rightarrow z = 4-(x+y-1)-2(3x+2y-3) = -7x-5y+11$

$\Rightarrow 7x+5y+z-11=0$

Conclusion: **Une équation cartesienne du plan P est : $7x+5y+z-11=0$**

● $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -14 + 15 - 1 = 0$

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires d'ou ils existent deux réels a et b vérifiant $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

(On a : $\vec{w} = \vec{u} + 4\vec{v}$ (résolution du système))

Exercice n° 6

● a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignées ; ils déterminent donc un plan P de l'espace ξ

b) une équation cartésienne du plan P est de la forme :
P : ax +by +cz+d=0

$A(1 ;-2 ;1) \in P \Rightarrow a-2b+c+d=0$

$B(2;-1;-2) \in P \Rightarrow 2a-b-2c+d=0$

$C(1;0;1) \in P \Rightarrow a+c+d=0$

On obtient ainsi le système (S) suivant:

$\begin{cases} a-2b+c+d=0 \\ 2a-b-2c+d=0 \\ a+c+d=0 \end{cases}$

une résolution de ce système donne :
$a=4c$; $b=-c$ et $d=-5c$

Donc une équation cartésienne de P est :

$P : 4x - y + z - 5 = 0$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur de P signifie que

$4 \times (-2) + 3 \times (-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 11$

● a) $\overrightarrow{U_D}$ vecteur de D

$\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, comme $m \neq 11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite **D et P sont sécantes en A.**

b) $\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $m \neq 11$. Donc D et P sont sécantes.

Cherchons le point d'intersection de P et D, en effet :

$D : \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$M(x,y,z) \in P \cap D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 3t & (3) \\ 4x - y + z - 5 = 0 & (4) \end{cases}$$

En remplacent (1), (2) , (3) dans (4) on trouve :

$-8t - 3t + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{8}$

D'où $P \cap D : \left\{ M\left(\frac{5}{4}, \frac{-15}{8}, \frac{-15}{8} \right) \right\}$

c) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme $m \neq 11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite D et P sont sécantes en B.

conclusion : **D et P sont sécantes en B.**

Exercice n° 7

a) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D

$\overrightarrow{U_{D'}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D'

b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{U_D}$ et $\overrightarrow{U_{D'}}$ non colinéaires et par suite les droites D et D' ne sont pas parallèles **(1)**

c) $M (x, y, z) \in D \cap D'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = \alpha - 4 \\ x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 = 1 - 2\beta \\ y = 3\alpha + 2 = 3 - \beta \\ z = \alpha - 4 = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

(1) + (3) donne $-3 = 2$ impossible

Donc le système n'a pas des solutions

d'où $D \cap D' = \varnothing$ **(2)**

Conclusion : D et D' sont non coplanaires.

Exercice n° 8

a) $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -1$. Donc P // P'(strictement//)

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$: P et P' sont sécants

c) $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$ donc P et P' sont sécants.

d) $\frac{0}{1} \neq \frac{2}{-2}$: P et P' sécants

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P'

$2\times(-1) - 3\times1 + 2\times0 = -5 \neq 0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P **Donc P et P' sont sécants**

f) Déterminons une équation cartésienne de P et de P'

- <u>pour le plan P.</u>

$x + y = 3 - 2p \Rightarrow 2p = 3 - x - y$

$x - y = 2m - 1 \Rightarrow 2m = x - y + 1$

On a :

$2z = -2 + 2m - 2 \times 2p = -2 + (x - y + 1) - 2.(3 - x - y)$

Donc $\boxed{P : 3x + y - 2z - 7 = 0}$

<u>**Pour le plan P'**</u>

$x + y = 3 + 4s \Rightarrow 4s = x + y - 3$

$y - x = 7 + 4t \Rightarrow 4t = y - x - 7$

D'où

$2z = 8 - 4t + 2 \times 4s = 8 - y + x + 2x + 2y - 6$
$= 9 + y + 3x$

Donc

$\boxed{P' : 3x + y - 2z + 9 = 0}$

Par suite $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2}$ d'où P // P'

Exercice n° 9

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ A(1 ;0 ;2)

Donc

$$(ABC) : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 2 - \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

b) Cherchons une équation cartésienne de (ABC)

On a : $x + y = 1 - 2\alpha - \beta + 2\alpha + \beta = 1$

Donc : $(ABC): x+y-1=0$

$P // (ABC) \Leftrightarrow \quad P: x+y+d=0$

Comme I (0, 2, -3) $\in$ P on aura d = -2

Donc $P: x+y-2=0$

Exercice n° 10

a)

$$M(x,y,z) \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha+1 \\ y=3\alpha+2 \\ z=\alpha-4 \\ x+y+z+4=0 \end{cases}$$

Remplacent les expressions de x, y et z en fonction de α dans l'équation du P.

On aura :

$-\alpha+1+3\alpha+2+\alpha-4+4=0$

$\Rightarrow 3\alpha+3=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow x=2$; $y=-1$ et $z=-5$

Donc **$P \cap D = \{M(2,-1,-5)\}$**

b) Equations paramétriques de D :

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha+3 \\ y=2\alpha-1 \quad \text{avec } \alpha\in\Re \\ z=3\alpha-2 \end{cases}$$

Remplacent x, y et z en fonction de α dans l'équation cartésienne de P. On aura :

$2\alpha+3-2\alpha+1+3\alpha-2-2=0 \Rightarrow \alpha=0$

donc **$P \cap D = \{M(3,-1,-2)\}$**

c) Cherchons une équation cartésienne de P

En effet on a :

$y+4z=8+5\alpha \Rightarrow 5\alpha=y+4z-8$
$z-y=2+5\beta \Rightarrow 5\beta=z-y-2$

Donc $5x = 15+2.5\alpha+3.5\beta$
$= 15+2y+8z-16+3z-3y-6$
$= -7-y+11z$

Donc (P) : $5x+y-11z+7=0$

Maintenant remplacent x, y et z de l'équation paramétrique de D dans l'équation cartésienne de P.

On aura : $5(\alpha+1)-2\alpha-11(-\alpha+1)+7=0$

$\Rightarrow 5\alpha+5-2\alpha+11\alpha-11+7=01 \Rightarrow 4\alpha+1=0$

$\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{14}$

$P \cap D : \{M(\frac{13}{14}, \frac{1}{7}, \frac{15}{14})\}$

d) Déterminant une représentation paramétrique de D

On posera $z=\alpha$, $\alpha\in\Re$

$$D: \begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x-z+1=0$
$(1)-(2) \Rightarrow 2y-5z+3=0$

D'où $x=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$ et $y=\frac{5}{2}z-\frac{3}{2}$

$$D: \begin{cases} x=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2}\alpha-\frac{3}{2} \quad \alpha\in\Re \\ z=\alpha \end{cases}$$

Remplacent par la suite x, y et z dans l'équation de P, on aura

$\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\alpha+\frac{3}{2}+\alpha+1=0 \Rightarrow -\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=2$

D'où $P \cap D = \{M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2)\}$

Exercice n° 11

- $P: 2x-y+z-3=0$
  $Q: x+2y+z-1=0$

On a : $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$

Donc P et Q sont sécants suivant la droite D avec :

$$D: \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

- $P: 2x-y+z-3=0$
  $R: 3x+y-z+2=0$

$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ P et R sont sécants suivant la droite

$$\Delta: \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$

- $R: 3x+y-z+2=0$
  $Q: x+2y+z-1=0$

$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$ Donc R et q sont sécants suivant la droite

$$\Delta': \begin{cases} 3x+y-z+2=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

● $M(x, y, z) \in P \cap Q \cap R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 & (1) \\ x + 2y + z - 1 = 0 & (2) \\ 3x + y - z + 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) \Rightarrow 3z - 6 = 0 \Rightarrow z = 2$

$(1) + (3) \Rightarrow 5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Dans (1) on a : $y = 2x + z - 3 = \frac{2}{5} + 2 - 3 = \frac{-3}{5}$

Finalement :

$$\mathbf{P \cap Q \cap R = \{M(\frac{1}{5}, \frac{-3}{5}, 2)\}}$$

Exercice n° 1

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\vec{v}=(-1)\times 0+(-2)\times 6+3\times(-4)=-24$

$\boxed{\vec{u}\vec{v}=-24}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\vec{v}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times 2+(-2)\times\left(-\sqrt{2}\right)+3\times\frac{3}{2}$

$=\left(-\frac{4}{3}\right)+2\sqrt{2}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\vec{u}\vec{v}=\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 2

I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[CD]$.

● AB= AC = AD = BD= DC = a.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right).$

$= a.a.\cos\frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right).$

$=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}}$

● a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0..$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$.

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0.$

$\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$.

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}.=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

$\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)$ et (DC) sont orthogonales. De même pour les droites (AC) et (BD) ainsi que (AD) et (BC) .

3)a) On a: $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}.$

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0.$

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CJ}$

$=\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}CD^2$

$=0-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=0}$ et $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=0}$.

b) La droite (IJ) est la perpendiculaire commune des deux droites (AB) et (CD) .

c) d_1 : distance entre (AB) et (CD) . d_1 = IJ

or $IJ^2=JB^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ (IJB triangle rectangle en I)

$=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.(CJB trgle rectgle en J)

$\Rightarrow$ $IJ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

De même $d((AC),(BD))=d((AD),(BC))=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P $\Rightarrow$ P: $x-y+d=0$.

$A(1,-2,3)\in P \Leftrightarrow 1-(-2)+d=0 \quad \Leftrightarrow d=-3$

D'où : $\boxed{P:\ x-y-3=0.}$

Exercice n° 4

(CD) est perpendiculaire à P d'où $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal de P avec $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$.

Donc P: $x-4y+3z+d=0$

$A(0,1,-2)\in P \Rightarrow 0-4\times 1+3\times(-2)+d=0 \Rightarrow d=10$

D'où : $\boxed{P:\ x-4y+3z+10=0}$.

Exercice n° 5

$\Delta\perp P \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite Δ

D'où $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\y=-2-3t\\z=t\end{cases},\ t\in IR$

Exercice n° 6

Le point D(1 ;-2 ;3) est le projeté orthogonal de O sur P

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P avec.

Donc P: $x-2y+3z+d=0$.

$D\in P \Leftrightarrow 1-2\times(-2)+3\times 3+d=0 \quad \Leftrightarrow d=-14$.

D'où : $\boxed{P: x-2y+3z-14=0}$.

Exercice n° 7

- P: $x-y+z+1=0 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

P': $-x+y-z=0 \Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'

$\Rightarrow \vec{n}'=-\vec{n} \Rightarrow \vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *sont colineaires* $\Rightarrow$ P'//P

- P: $2x+y+z-2=0 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P.

P': $-x+y-z=0 \Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P'.

$\vec{n}\wedge\vec{n}'\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *ne sont pas colineaires*

Donc P et P' sont sécants.

Exercice n° 8

● Une équation cartésienne d'un plan admettant $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal est $z+d=0$ avec $d\in IR$ .Par exemple le plan d'équation $z=0$ (pour $d=0$).

● a) On a le plan d'équation $x=1$ a pour vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et le plan d'équation $y=0$ a pour vecteur normal $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Comme $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ sont orthogonaux alors ces deux plans sont perpendiculaires.

b) $M(x,y,z)\in(x=1)\cap(y=0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

On pose $z=t$ avec $t\in IR$, on aura un système d'équation paramétrique de leur droite d'intersection est

$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t\end{cases}$, avec $t\in IR$

Exercice n° 9

- $A(1,0,2)$ et P: $2x-y+z-2=0$ donc d

$$(A,P)=\frac{|2\times1-0+2-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(A,P)=\frac{2}{\sqrt{6}}}$$

- $A(0,0,-3)$ et P: $2x-2y+z+5=0$ donc d

$$(A,P)=\frac{|2\times0-2\times0-3+5|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}.$$

$$\boxed{d(A,P)=\frac{2}{3}}.$$

• Déterminons tout d'abord une équation cartésienne du plan P = (BCD) :

On sait que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal de P, avec

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Donc P: $-x-y-z+d=0$.

$B \in P \Leftrightarrow d=1$.

D'où : P: $x+y+z-1=0$. Par suite

$$d(A,P)=\frac{|-1+1+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{d(A,P)=0}$.

Exercice n° 10

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

Exercice n° 11

● Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ avec : $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ avec : $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

On a: $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A B et C définissent un plan P .

3) P = (ABC) : $x+y+z+d=0$

$A \in P \Leftrightarrow 1+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

D'où : $\boxed{P:\ x+y+z-2=0}$

Exercice n° 12

P: $x+y+z+1=0$; P': $x-y+2z-1=0$

● $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

● $$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}}$.

● $\vec{w}\neq\vec{0}$ donc P et P' sont sécants suivant la droite Δ ayant pour équations cartésiennes

$$\Delta:\begin{cases}x+y+z=0 & (1)\\x-y+2z-1=0 & (2)\end{cases}.$$

Posons $z=t$, on aura: $(1)+(2) \Rightarrow 2x+3z=0$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}z$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y-z+2=0 \quad \Rightarrow y=\frac{1}{2}z-1.$

Donc $\Delta:\begin{cases}x=-\frac{3}{2}t\\y=\frac{1}{2}t-1\\z=t\end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

D'où la droite d'intersection de P et P' est

$$\Delta\left(A(0,-1,0);\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice n° 13

$\vec{u}.\vec{v}=0$.

Montrons que : $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, posons $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et

$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, on aura : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}bc'-cb'\\a'c-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}abb'-a'b^2-a'c^2+acc'\\bcc'-b'c^2-b'a^2+aa'b\\aa'c-c'a^2-c'b^2+cbb'\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}a(bb'+cc')-a'(b^2+c^2)\\b(cc'+aa')-b'(c^2+a^2)\\c(aa'+bb')-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

On sait que: $\vec{u}\vec{v}=aa'+bb'+cc'=0$

Donc on aura: $bb'+cc'=-aa'$; $cc'+aa'=-bb'$ et $aa'+bb'=-cc'$

En remplaçant dans les expressions des composantes de $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$; on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-aaa'-a'(b^2+c^2)\\-bbb'-b'(c^2+a^2)\\-ccc'-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$

Finalement $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-a'(a^2+b^2+c^2)\\-b'(a^2+b^2+c^2)\\-c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$

D'autre part on a: $\|\vec{u}\|^2=a^2+b^2+c^2$ d'où $\|\vec{u}\|^2\vec{v}$ $\begin{pmatrix}a'(a^2+b^2+c^2)\\b'(a^2+b^2+c^2)\\c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$.

Conclusion: Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

Exercice n° 14

- On a:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{1}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$$

De même $\|\vec{v}\|=1$ et $\|\vec{w}\|=1$.

Aussi on a: $\vec{u}\vec{v}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}-\frac{16}{81}=0$

$\vec{u}\vec{w}=\frac{8}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{32-4-28}{81}=0$.

$\vec{v}\vec{w}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{4-32-28}{81}=0$.

D'où $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ et $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{w}=\vec{v}\vec{w}=0$.

Par suite la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée

On a:

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}=\vec{w}$ donc la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe

Exercice n° 15

- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(AM)\perp(AB)$.

Donc l'ensemble des points M est la droite qui est perpendiculaire à (AB) au point A .

- $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(AM)//(AB)$ d'où M décrit la droite (AB) .

- **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0$

$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$M∈Plan (A, $\vec{u};\vec{v}$)

- **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$M∈la droite passant par A et ⊥au plan P(A, $\vec{u};\vec{v}$).

Exercice n° 16

- L'aire A_1 du triangle CEH:

CEH triangle rectangle en H⇒ $A_1=\frac{1}{2}HC\times HE=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

- L'aire A_2 du triangle CFH:

On a $CF=CH=FH=\sqrt{2}$ donc CFH est un triangle équilatéral

Donc $A_2=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{FH}\wedge\overrightarrow{FC}\|=\frac{1}{2}$

$\|\overrightarrow{FH}\|\|\overrightarrow{FC}\|.\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- L'aire A_3 du triangle CDF:

CEH triangle rectangle en C ⇒ $A_3=\frac{1}{2}CF\times CD=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice n° 17

$M_O(\vec{F})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

- a) $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{F}$

$=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\underbrace{\overrightarrow{HA}\wedge\vec{F}}_{\overrightarrow{HA}\text{ et }\vec{F}\text{ colinéaires}}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\vec{0}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}$

Donc :

$$\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\|=\|\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}\|=\|\overrightarrow{OH}\|\times\|\vec{F}\|\times\overbrace{\left|\sin(\pm\frac{\pi}{2})\right|}^{1}=OH\times\|\vec{F}\|$$

D'où $\|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}\| = OH \times \|\vec{F}\|$

b) Soit $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ deux forces de même vecteur $\vec{F}$ et de même support Δ appliquées respectivement en A_1 et A_2 et O un point quelconque de l'espace.

$M_O(\vec{F_1}) = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_1}) \wedge \vec{F}$

$= \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{A_2A_1} \wedge \vec{F}$

(*or* $\overrightarrow{A_2A_1} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ *car* A_2 *et* A_1 *sont deux points de* Δ *et* $\vec{F}$ *un vecteur directeur de* Δ; *donc* $\overrightarrow{A_2A_1}$ *et* $\vec{F}$ *colineaires*)

Donc $M_O(\vec{F_1}) = \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F} = M_O(\vec{F_2})$

Remarque :
(interprétation :cela veut dire que le moment dépend de la force et de son support et ne dépend pas du point A)

● $M_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'A} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{F}$

$= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$

$= -\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F} + M_O(\vec{F})$

$= \vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'} + M_O(\vec{F})$

● Soit $\vec{F_1}$; $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ trois forces appliquées respectivement en A_1 ; A_2 et A_3 et de supports respectives Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3

- S'il y'en a deux supports confondus ;alors le faite que les trois forces ont une résultante nulle ($\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$)implique que le troisième support est // aux autres et par suite les supports sont coplanaires .
- Supposons maintenant que les trois supports sont distincts deux à deux. cela nous permet de supposer (tenant compte de la remarque faite en 1) b)) que A_3 n'appartient ni à Δ_1 ni à Δ_2 .

Le faite que le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point O de l'espace donne

$M_O(\vec{F_1}) + M_O(\vec{F_2}) + M_O(\vec{F_3}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F_2} + \overrightarrow{OA_3} \wedge \vec{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F_2} + \overrightarrow{OA_3} \wedge (-\vec{F_1} - \vec{F_2}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_3}) \wedge \vec{F_1} + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3}) \wedge \vec{F_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_3A_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{A_3A_2} \wedge \vec{F_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_3A_1} \wedge \vec{F_1} = \vec{F_2} \wedge \overrightarrow{A_3A_2}$

$\left(\overrightarrow{A_3A_1} \wedge \vec{F_1} \neq \vec{0}\ car\ A_3 \notin \Delta_1 ; A_1 \in \Delta_1\ et\ \vec{F_1}\ directeur\ de\ \Delta_1\right)$

Or

$\overrightarrow{A_3A_1} \wedge \vec{F_1}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_1)$

$\vec{F_2} \wedge \overrightarrow{A_3A_2}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_2)$

$\Rightarrow P(A_3;\Delta_1) // P(A_3;\Delta_2)$ (vecteur normal *commun*)

et par suite $P(A_3;\Delta_1) = P(A_3;\Delta_2)$ (1)[// *et point commun*]

Un travail analogue donnera :

$P(A_2;\Delta_1) = P(A_2;\Delta_3)$ (2)

$P(A_1;\Delta_2) = P(A_1;\Delta_3)$ (3)

Tenant compte du fait que $A_1 \in \Delta_1$; $A_2 \in \Delta_2$ et $A_3 \in \Delta_3$; **Les résultats (1) ;(2)et(3) permet de conclure que les supports Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3 sont coplanaires.**

Exercice n° 18

● On sait que :

$\vec{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal de P

$\vec{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de Q

Et $\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$ donc $\vec{n_P}$ et $\vec{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

● $\vec{n_P} \wedge \vec{n_Q} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

●

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et D est perpendiculaire à R d'où $\vec{u}$ est un vecteur normal de R et puisque $O \in R$ on aura R : $\boxed{x + 7y + 5z = 0}$

●

$I(x,y,z) \in R \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=0 & (1)\\ 2x-y+z-3=0 & (2)\\ x+7y+5z=0 & (3)\end{cases}$

(1) + 2×(2) donne $5x - z - 6 = 0$ donc :

$\boxed{z = 5x - 6}$ (4)

(1) + 3×(2) donne $7x - y - 9 = 0$ donc :

$\boxed{y = 7x - 9}$ (5)

Remplaçant (4) et (5) dans l'égalité (3) on aura :

$x+7(7x-9)+5(5x-6)=0 \Leftrightarrow 75x-93=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{93}{75}=\frac{31}{25}$

D'où : $y=7\times\frac{31}{25}-6=-\frac{8}{25}$ et $z=5\times\frac{31}{25}-9=\frac{1}{5}$

conclusion : $\boxed{I(\frac{31}{25},-\frac{8}{25},\frac{1}{5})}$

Exercice n° 19

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$

Or : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0\times(-1)-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}\neq0$

D'où A, B, C et D sont non coplanaires

● $AB=2$; $AC=2$; $AD=2$

$BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$DC=\sqrt{0^1+2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$

$BD=\sqrt{1^1+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

conclusion : comme A,B,C et D sont non coplanaires et AB=AC=AD=BC=DC=BC il résulte que ABCD est un tétraèdre regulier

● Soit h la hauteur du tétraèdre ABCD on a :

$$h=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}=\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{0^2+(-2\sqrt{2})^2+2^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{h=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

●

$a\in[0,\sqrt{2}]$; $P_a : z=a$

a) $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P_a

* Intersection de P_a et la droite (AC)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AC}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq0$

D'où (AC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point F (x_F ,y_F ,z_F) tels que les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_F=-\alpha\\y_F=-1-\alpha\\z_F=-\sqrt{2}\alpha\\z_F=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{F\ (\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (AD)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AD}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq0$

D'où (AD) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point G (x_G ,y_G ,z_G) tels que ces coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_G=-\alpha\\y_G=1+\alpha\\z_G=-\sqrt{2}\alpha\\z_G=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{G\ (\frac{a}{\sqrt{2}},1-\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (BC)

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq0$

D'où (BC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point I (x_I,y_I ,z_I) tels que les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite (BC) et l'équation du plan P_a donc le système :

$$\begin{cases}x_I=\alpha\\y_I=-1-\alpha\\z_I=-\sqrt{2}\alpha\\z_I=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

ce qui donne : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{I\ (-\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

b) $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{IH}$

ce qui montre que FGHI est un parallélogramme **(1)**

Aussi on a : $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}a\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}=0$

Donc (FI) et (FG) sont perpendiculaires **(2)**

D'après **(1)** et **(2)** : $\boxed{\text{FGHI est un rectangle}}$

● a) $a \in\left[0,\sqrt{2}\right] \Rightarrow 2-\sqrt{2}.a>0$

$\Rightarrow FG=\left|2-\sqrt{2}a\right|=2-\sqrt{2}a$ et $IF=\sqrt{2}a$

d'où $P(a)=2\times(FG+IF)=2\times\ (2-\sqrt{2}a+\sqrt{2}a)=4$

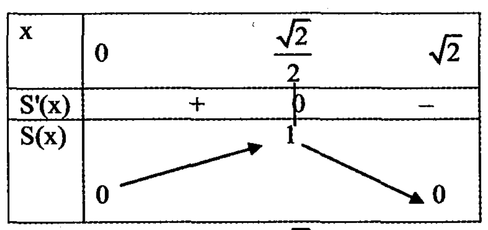
$\Rightarrow \boxed{P(a)=4}$

$S(a)=FG\times IF=\ (2-\sqrt{2}a)\times\sqrt{2}a=\ 2\times(\sqrt{2}a-a^2)$

$\Rightarrow \boxed{S(a)=2\times(\sqrt{2}a-a^2)}$

b) Posons $S(x)=2(\sqrt{2}x-x^2)$

On a : $S'(x)=2\times(\sqrt{2}-2x)$



x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
S'(x)	+	0	−
S(x)	0 ↗	1	↘ 0

S (a) admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ atteint 1

<u>Remarque</u> : pour cette valeur de a FGHI est un carré

<u>Exercice n° 20</u>

●

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$:vecteur normal de P

$\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$:vecteur normal de Q

$\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{-3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires d'ou P et Q sont sécants suivant une droite D

●

a)

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Leftrightarrow$

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$

Comme a et b non tous nuls alors :

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$ est l'équation cartésienne d'un plan F_{ab}

$M(x, y, z) \in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y+5z-1=0 & (1)\\ 2x-3y+2z-2=0 & (2)\end{cases}$

$\Rightarrow a\times(1)+b\times(2)=0$

$\Rightarrow M\in plan\,F$

Conclusion :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$ est **l'équation cartésienne d'un plan F_{ab} contenant tout point M (x, y, z) $\in P\cap Q$ donc contenant la droite D**

b) D'après la question 2) a) tout plan ayant une équatior cartésienne de la forme :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

contient la droite D;et pour qu'il contient le point I (2, 5, 0) il suffit que: a(6-10+0-1)+b(4-15+0-2)=0

$\Rightarrow -5a-13b=0 \Rightarrow$ Par exemple pour a = 13 et b = – 4

d'ou :

$R: 13\times(3x-2y+5z-1)+(-5)\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Rightarrow \boxed{R: 29x-11y+55z-3=0}$

● S d'ou une équation cartésienne de S

d'après 2) a) pour $(a, b)\neq(0,0)$:

$S: (3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$

est un plan contenant D ;

Pour que S et P soient perpendiculaires il suffit que le produit scalaire de leurs vecteurs normaux soitt nul ce qui donne

$\overrightarrow{n_S}\bullet\overrightarrow{n_P}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3a+2b\\-2a+3b\\5a+2b\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow 9a+6b+4a+6b+25a+10b=0$

$\Rightarrow 19a+11b=0 \Rightarrow 19a=-11b$

Donc pour a=11 et b=-19 S et P sont perpendiculaires

D'ou : $\boxed{S: -5x+35y+17z+27=0}$

4)a) rectifier (I au lieu de A)

• $d(I,P)=\frac{\left|6-10+0-1\right|}{\sqrt{9+4+25}}=\frac{5}{\sqrt{38}}$

• $d(I,S)=\frac{\left|-10+175+0+27\right|}{\sqrt{5^2+35^2+17^2}}=\frac{192}{\sqrt{1539}}=\frac{192}{9\sqrt{19}}$

$\Rightarrow \boxed{d(I,S=\frac{64}{3\sqrt{19}}}$

- Un système d'équation paramétrique de la droite D :

$$D: \begin{cases} x = -11\alpha - \frac{1}{5} \\ y = -4\alpha - \frac{4}{5} \quad \alpha \in IR \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\-4\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et J($-\frac{1}{5}$, $-\frac{4}{5}$,0) un point de la droite D donc on a :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{11}{5}\\-\frac{29}{5}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}-29\\11\\55\end{pmatrix} \text{ D'ou}$$

$$d(I,D) = \frac{\|\overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{29^2+4^2+55^2}}{\sqrt{11^2+4^2+5^5}} = \frac{\sqrt{3987}}{162}$$

$$\boxed{d(I,D) = \frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}}}$$

b)

$$d^2(I,S)+d^2(I,P) = (\frac{5}{\sqrt{38}})^2 + (\frac{64}{3\sqrt{19}})^2 = \frac{25}{38}+\frac{36864}{1539}$$

$$= \frac{75753:171}{3078:171} = \frac{443}{18}$$

Et on a $d^2(I,D) = (\frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}})^2 = \frac{443}{18}$

D'ou $\boxed{d^2(I,S)+d^2(I,P) = d^2(I,D)}$

Exercice n° 21

- (S) : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$
- (S) : $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=2$

Exercice n° 22

- $M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow (-1-x)(-x)+(3-y)(-y)+(-z)(-2-z) =$

$\Leftrightarrow x+x^2-3y+y^2+2z+z^2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{(S): x^2+y^2+z^2+x-3y+2z=0}$

2) Une deuxième méthode

Le centre de la sphère est le milieu Ide segment [AB]

Le rayon de la sphère est R= $\frac{AB}{2}$

On a :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(1,-\frac{3}{2},0\right)$$

$$AB = \sqrt{0^2+1^2++(-4)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{(S): (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-3)^2 = \frac{9}{4}}$$

Exercice n° 23

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

Exercice n° 24

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$

D'où S est une sphère de centre I (1,1,1) et de rayon $\sqrt{3}$

On a : $d(I,P)=\frac{|1-1|}{\sqrt{1+1}}=0\prec\sqrt{3}$ ce qui prouve que S et P sont sécants suivant le cercle ζ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$

b)

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+3)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$$

D'où S est une sphère de centre I (1, – 2, – 3) et de rayon $\sqrt{14}$

On a : $d(I,P)=\frac{|2\times1+3\times(-2)-2\times(-3)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

$$d(I,P)=\frac{2}{\sqrt{17}}\prec R=\sqrt{14}$$

$\Rightarrow\begin{cases}\text{S et P sont sécants suivant}\\ \text{le cercle de centre H et de rayon r}\end{cases}$

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{14-\frac{4}{17}}=\sqrt{\frac{234}{17}}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

On sait que H est le projeté orthogonal de I sur le plan P

D'où $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) sont colinéaires

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{N_P}\\ H\in P\end{cases}\alpha\in I\!R\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+2\alpha\\ y_H=-2+3\alpha\\ z_H=-3-2\alpha\\ 2x_H+3y_H-2z_H+1=0\end{cases}\alpha\in I\!R$$

$$\Rightarrow 2+4\alpha-6+9\alpha+6+4\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\frac{11}{17},-\frac{43}{17},-\frac{45}{17})}$$

c)

$$x^2+y^2+z^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+y^2+z^2=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

D'où S est une sphère de centre I (1, 0, 0) et de rayon 1

On a : d = $d(I,P)=\frac{|1+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$

$\Rightarrow$ S et P sont sécants suivant un cercle de centre H et de rayon r

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) Sont colinéaires

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{N_P} \\ H \in P \end{cases} \alpha \in IR \Rightarrow \begin{cases} x_H = 1+\alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = 0 \\ x_H + y_H = 0 \end{cases} \alpha \in IR$$

$$\Rightarrow 1+2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)}$$

Exercice n° 25

●

$$D : \begin{cases} x = 1+\lambda \ (1) \\ y = 1-\lambda \ (2) \quad \lambda \in IR \\ z = 2-\lambda \ (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x + y = 2$
$(2) - (3) \Rightarrow y - z + 1 = 0$

D'où les deux plans des équations respectifs :
$x + y - 2 = 0$ et : $y - z + 1 = 0$ sont sécants su droite D

$x + y - 2 = 0$ et : $y - z + 1 = 0$ sont sécants suivant la droite D

● a) le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D donc c'est un vecteur de P car $D \subset P$

E (1,1 2) est un point de D donc c'est un point de P et comme $A \notin D$ alors on aura $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de P non colinéaire avec $\vec{u}$ par suite les équations paramétriques de P sont :

$$P : \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \quad (\alpha, \beta) \in IR^2 \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

b) On a : $x + y = 2$ donc $\boxed{P: x + y - 2 = 0.}$

3) P et Q sont parallèles donc le plan Q à pour équation cartésienne, Q : $x + y + d = 0$ or B (0, 0,1) € Q

$\Rightarrow d = 0$ donc $\boxed{Q: x + y = 0.}$

4) a) P et R sont perpendiculaires donc le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ de P est un vecteur de R aussi D est incluse dans R donc $\vec{u}$ est un vecteur de R, alors le vecteur

$\vec{u} \wedge \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de R il résulte :

R : $x - y + 2z + d = 0$

Comme E est un point de D et D est incluse dans *P*

Donc E appartient à *P* ce qui donne : $1 - 1 + 4 + d = 0$

$\Rightarrow d = -4$ Finalement $\boxed{R: x - y + 2z - 4 = 0.}$

$\Leftrightarrow$ ... e aux

$$\frac{|x_I - y_I + 2z_I - 4|}{\sqrt{6}} = \frac{|x_I + y_I - 2|}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$|x_I - y_I + 2z_I - 4| = \sqrt{3}|x_I + y_I - 2|$$

Par exemple on prend I (4, 0, $\sqrt{3}$)

Donc la sphère de centre I (4, 0, $\sqrt{3}$) et de rayon $\sqrt{2}$ est tangente aux plans *P* et *R*

c) De même le centre J (x_J, y_J, z_J) d'une sphère tangente aux plans *R* et *P* vérifie : $d(I,P) = d(I,R)$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{|x_J + y_J - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_J + y_J|}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$|x_J + y_J - 2| = |x_J + y_J|$$

Par exemple on prend J (1, 0, 0)

Donc la sphère de centre J (1, 0, 0) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est tangente aux plans *P* et *Q*

Exercice n° 26

● a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui montre que A, B et C ne sont pas alignés

b) A, B et C sont non alignés donc ils définissent un seul plan *P*

$$1 - 2\times1 + 2\times1 - 1 = 0 \Rightarrow A \in P$$
$$3 - 2\times1 + 2\times0 - 1 = 0 \Rightarrow B \in P$$
$$-1 - 2\times0 + 2\times1 - 1 = 0 \Rightarrow C \in P$$

Les cordonnées de A, B et C vérifient l'équation donc le plan *P* à pour équation : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

c) on sait que :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ vec normal de P et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ normal de Q

Et $\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix} = -4-2 = -6 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

a) $\bullet d(I_t,P) = \dfrac{|1+2+2t-1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}} = \dfrac{2|1+t|}{3}$

$\bullet d(I_t,Q) = \dfrac{|2-1+2t-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{2|1+t|}{3}$

$\Rightarrow d(I_t,P) = d(I_t,Q)$

b) Pour t = − 1 on trouve $d(I_{-1},P) = d(I_{-1},Q) = 0$

Donc I_{-1} appartient à P et à Q

c) pour $t \neq -1$: $d(I_{-1},P) = d(I_{-1},Q) \neq 0$

Donc il existe une seule sphère S_t de centre I_t et de rayon $R = \dfrac{2|1+t|}{3}$ qui est tangente au même temps à P et à Q

On prend t = 2

Le point de contact H de la sphère S_2 et de P est le projeté orthogonal de I_2 (1, − 1, 2) sur le plan P

Posons, $H(x_H, y_H, z_H)$

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{I_2H} = \alpha\overrightarrow{n_P} \\ H \in P\end{cases}$ $\alpha \in IR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = 1+\alpha \\ y_H = -1-2\alpha \\ z_H = 2+2\alpha \\ x_H - 2y_H + 2z_H - 1 = 0 \end{cases} \quad \alpha \in IR$$

$\Rightarrow 1+\alpha-2(-1-2\alpha)+2(2+2\alpha)-1=0$

$\Rightarrow 6+9\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$

Examen du Baccalauréat Session principale de Juin 2008

Exercice n° 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de la réponse vaut 0 point.

- La forme algébrique de $(3-2i)^2$ est :

  a) $-5+12i$ b) $5-12i$ c) $5+12i$.

- La forme exponentielle de $(-1-i\sqrt{3})$ est :

  a) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ b) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ c) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

- Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-(1+5i)z+10i=0$.

  a) La somme des racines de (E) est égale à $-1-5i$.
  b) Le produit des racines de (E) est égal à $10i$.
  c) $2i$ est une racine de l'équation (E).

Exercice n° 2 (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1,-4,0)$, $B(4,-1,3)$, $C(4,-4,-3)$ et $D(-2,2,-3)$.

- a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

  b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
- Calculer l'aire du triangle ABC.
- Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan ABC.
- a) Vérifier que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27.

  b) Calculer l'aire du triangle BCD.

  c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).

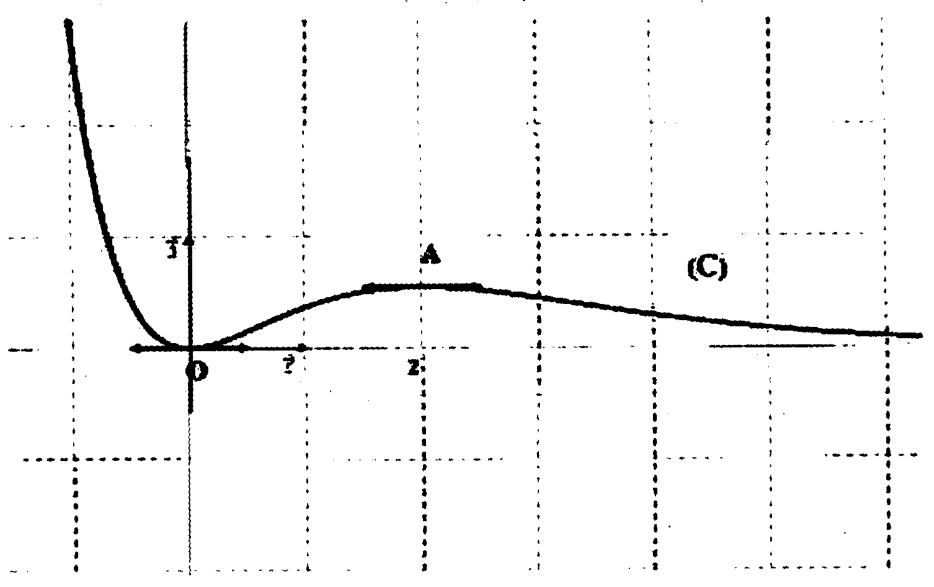
Exercice n° 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I- On a représenté ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- Seulement deux tangentes horizontales, l'une au point O et l'autre au point $A(2, 4e^{-2})$.



En utilisant le graphique :

- Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre des solutions de l'équation: $f(x) = m$.

II- On suppose que la fonction f est définie par : $f(x) = x^2e^{-x}$. On note f ' la fonction dérivée de f.

- Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$.
- Soit $I = \int_0^2 xe^{-x}dx$ et $J = \int_0^2 f(x)\,dx$.

  a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1 - 3e^{-2}$.

  b) En utilisant II-1), montrer que $J = 2I - \int_0^2 f'(x)dx$.

  c) En déduire la valeur de J et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice n° 4 (4 points)

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une boite contenant trois jetons blancs et deux jetons rouges, tous indiscernables au toucher.

● On lance le dé une seule fois et on observe le numéro de la face supérieure de ce dé.

Soit les événements :

E : «obtenir un numéro supérieur ou égal à 5» .

$\overline{E}$: l'événement contraire de E.

Déterminer la probabilité de chacun des événements E et $\overline{E}$.

● On lance le dé une seule fois.

- Si l'événement E est réalisé, alors on tire simultanément et au hasard 2 jetons de la boite.
- Si l'événement E n'est pas réalisé, alors on tire simultanément et au hasard 3 jetons de la boite.

Soit l'événement A: « obtenir un seul jeton blanc ».

On note : $p(A / E)$ la probabilité de l' événement : A sachant que l' événement E est réalisé.

$p(A / \overline{E})$ la probabilité de l' événement : A sachant que l' événement $\overline{E}$ est réalisé .

a) Vérifier que $p(A / E) = \frac{3}{5}$ et que $p(A / \overline{E}) = \frac{3}{10}$.

b) En déduire la probabilité de l'événement A.

c) Soit D l' événement «obtenir 2 jetons rouges».

En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité de D.

Examen du Baccalauréat
Session Pincipale de Juin 2008
Corrigées

Exercice n° 1

Corrigé	Barème
● $(3-2i)^2 = 9-12i-4 = 5-12i \rightarrow$ (b)	1
● $-1-i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ $= 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \rightarrow$ **(a)**	1
● le produit des racines est $\frac{c}{a} = \frac{10i}{1} = 10i \rightarrow$ **(b)**	1

Exercice n° 2

Corrigé	Barème
● **a)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9+0-9=0$	**0.75** 0.25 pour $\overrightarrow{AB}$, 0.25 pour $\overrightarrow{AC}$ 0.25 calcul du produit scalaire
b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\18\\-9\end{pmatrix} = 9\vec{n}$,avec $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal du plan (ABC)	**0.75**
● l'aire a_1 du triangle ABC est : $a_1 = \frac{1}{2}\lVert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\rVert = \frac{\sqrt{81(1+4+1)}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$ Ou bien puisque le triangle ABC est rectangle on a : $a_1 = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{27}.\sqrt{18} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$	**0.75** 0.25 formule , 0.5 le calcul
● $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 3\vec{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ et le vecteur $\vec{n}$ sont colinéaires ce qui prouve que la droite (AD) est le plan ABC sont perpendiculaires	**0.75** 0.25 pour $\overrightarrow{AD}$ 0.5 pour (AD) $\perp$ (ABC)
● **a)** volume du tétraèdre ABCD : $v = \frac{1}{6}.\lvert(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\rvert = \frac{1}{6}.\lvert(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\rvert$ $= \frac{1}{6}.\lvert 27+6\text{x}18+27\rvert = \frac{1}{\not 6}\not 6.27 = 27$	**1** 0.5 Pour la formule appliquée 0.5 reste

b) notons a_2 aire(BCD) $a_2 = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|$ $= \frac{1}{2}\sqrt{36^2+36^2+18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18^2(4+4+1)}$ $= \frac{1}{2}.18.\sqrt{9} = 27$	**1** 0.5 Pour la formule appliquée 0.5 reste
c) Soit h la distance de A au plan (BCD), on a : $v = \frac{1}{3}.h.a_2$ donc $h = \frac{3v}{a_2} = 3$	**1** 0.5 Pour la formule appliquée 0.5 conclusion

Exercice n° 3

I/ ● $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$	**1.5** (0.5 pour chaque limite)
● • Si $m < 0$ → 0 solutions • Si $m = 0$ ou $m > 4e^{-2}$ → 1 solution • Si $m = 4e^{-2}$ → 2 solution • Si $0 < m < 4e^{-2}$ → 3 solution	**1.25** (5x0.25)
II/ ● f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = (x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})$ $= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 2xe^{-x} - f(x)$	**0.75**
● a) Calculons I au moyen d'une intégration par parties Posons $U(x) = x \rightarrow U'(x) = 1$ $V'(x) = e^{-x} \rightarrow V(x) = -e^{-x}$ d'où : $I = [U(x).V(x)]_0^2 - \int_0^2 V'(x)dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 (-$ $= -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2} - (e^{-2} - 1) = 1 - 3e^{-2}$	**1** (0.5choix +0.5calculs)
b) On a : $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$ donc : $\int_0^2 f'(x).dx = \int_0^2 2xe^{-x}dx - \int_0^2 f(x)dx = 2I -$ Par suite : $J = 2I - \int_0^2 f'(x).dx$	**1**

c) J désigne l'aire de la région du plan limitée par les droites x = 0, x = 2 et y = 0 et la courbe (C) $J = 2(1-3e^{-2}) - [f(x)]_0^2 = 2 - 6e^{-2} - f(2) + f(0)$ $J = 2 - 10e^{-2}$	**1.5** 0.5 $J = 2I - [f(x)]_0^2$ 0.5 Calculs 0.5 Interprétation

Exercice n° 4

● L'événement E << obtenir les chiffres 5 ou 6 >> $p(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	**1** (2x0.5)
● **a)** $p(A/E) = \frac{C_3^1 . C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $p(A/\overline{E}) = \frac{C_3^1 . C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$	**1** (2x0.5)
b) appliquons le principe de probabilités totale On a : $A = (A \cap E) \cup (A \cap \overline{E})$ d'où $p(A) = p(A \cap E) + p(A \cap \overline{E}) = p(E)p(A/E) + p(\overline{E})p(A/\overline{E})$ $= \frac{1}{3} . \frac{3}{5} + \frac{2}{3} . \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	**1** (0.25 Formule +0.75 reste)
c) $p(D/E) = \frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{10}$ et $p(D/\overline{E}) = \frac{C_2^2 . C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$ (compléter l'arbre) $p(D) = p(D \cap E) + p(D \cap \overline{E}) = \frac{1}{10} . \frac{1}{3} + \frac{3}{10} . \frac{2}{3} = \frac{7}{30}$	**1** 0.25 l'arbre 3x0.25 pour chaque probabilité

Examen du Baccalauréat Session principale de Juin 2009

Exercice n° 1 QCM (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- Les solutions dans C de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont

  a) opposées b) inverses c) ni opposées, ni inverses

- Soit A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B

  Si A et B sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs, alors

  a) $z_A = -z_B$ b) $z_A = \overline{z_B}$ c) $z_A = -\overline{z_B}$

- Le réel $\int_1^e Ln(x)dx$ est égal à

  a) -1 b) e c) 1

- Une primitive sur IR de la fonction $x \mapsto x^2+1$ est

  a) $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ b) $x \mapsto \ln(x^2+1)$ c) $x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

Exercice n° 2 (6 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1, 0, -1), B(1,3,5), C(-7,2,2) et H(-1,4,3).

- a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$.
  b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est $x - 2y - 2z + 15 = 0$.
  c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC).

- On considère l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$.
  a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R.
  b) Vérifier que I est le milieu du segment [AH].
  c) Déterminer la position relative de la sphère S et du pian (HBC).

Exercice n° 3 (5 points)

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation *m*.

Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité *m* •
- Parmi les employés qui ont choisi la modalité *m*, 80 % sont atteints d'une maladie chronique.
- Parmi les employés qui n'ont pas choisi la modalité *m*, 75 % sont atteints d'une maladie chronique.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

M : « l'employé choisit la modalité *m* »

C : « l'employé est atteint d'une maladie chronique »

● a) Déterminer les probabilités suivantes :

$p(M)$, $p(C/M)$ et $p(C/\overline{M})$.

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

● a) Calculer la probabilité que cet employé ait choisit la modalité *m* et soit atteint d'une maladie chronique.

b) Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisi la modalité *m* et soit atteint d'une maladie chronique.

c) En déduire p(C).

● Soit l'événement E : « l'employé choisit la modalité *m*, sachant qu'il est atteint d'une maladie chronique. »
Montrer que $p(E) = \frac{8}{23}$

Exercice n° 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + e^x - xe^x$.

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

● On donne ci-dessous le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	1	↗	2	↘	$-\infty$

a) Justifier que la restriction g de f à [0,+oo [réalise une bijection de [0,+∞ [sur]-∞ ,2]

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR,une solution unique α.

c) Vérifier que $1 < \alpha < 1,5$.

● a) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la position relative de la courbe (ζ) et la droite Δ d'équation y = x.

c) Tracer (ζ)et Δ.

● On note g^{-1} la fonction réciproque de g et (ζ') sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Tracer (ζ').

● a) Vérifier que la fonction F définie sur IR par $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est une primitive de f sur IR.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), la droite Δ et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .

c) En déduire que $\int_1^2 g^{-1}(x)dx = e - 2$.

Examen du Baccalauréat
Session Pincipale de Juin 2009
Corrigées

Exercice n° 1 — Corrigé

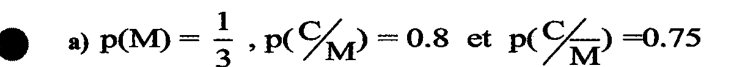
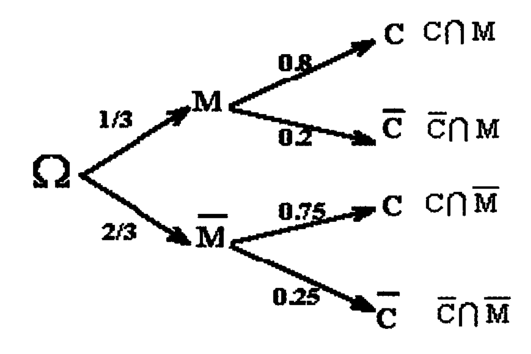
Corrigé	Barème
● $z'z''=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow z''=\frac{1}{z'} \Rightarrow z'$ et z'' sont inverses $\Rightarrow$ **(b)**	0.75
● $z_A=a+ib \Rightarrow z_B=-a+ib=-(a-ib)=-\overline{z_A} \Rightarrow$ **(c)**	0.75
● $\int_1^e \ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e=(e-e)-(0-1)=1 \Rightarrow$ **(c)**	0.75
● $\frac{x}{x^2+1}=\frac{2x}{2(x^2+1)}=\frac{(x^2+1)'}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]' \Rightarrow \int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right] \Rightarrow$ **(a)**	0.75

Exercice n° 2

Corrigé	Barème
● **a)** On a : $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-6\\-2\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix}$	1 (0.25+0.25+0.5)
b) $\vec{n}=\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HBC) donc (HBC) à pour équation cartésienne : $5x-10y-10z+d=0$ et comme B (1,3,5) Є (HBC) on aura : $5-30-50+d=0$ ce qui donne $d=75$ d'où une équation du plan (HBC) est : (HBC) : $5x-10y-10z+75=0$ on pourra diviser par 5 on aura : **(HBC) : $x-2y-2z+15=0$.**	**0.5** Indivisible
c) $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HA}\wedge\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ le vecteur normal de (HBC) sont colinéaires ce qui prouve que la droite (HA) est orthogonale au plan (HBC) or H appartient à (HBC) par conséquent H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC)	**0.5** Indivisible
● **a)** $a=0, b=-4, c=-2$ et $d=1$ On a: $h=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=\frac{0^2+16+4}{4}-1=4\succ 0$ donc S est une sphère de rayon $R=\sqrt{h}=2$ et de centre $I(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}) \Rightarrow I(0,2,1)$	**0.75** (3x0.25)

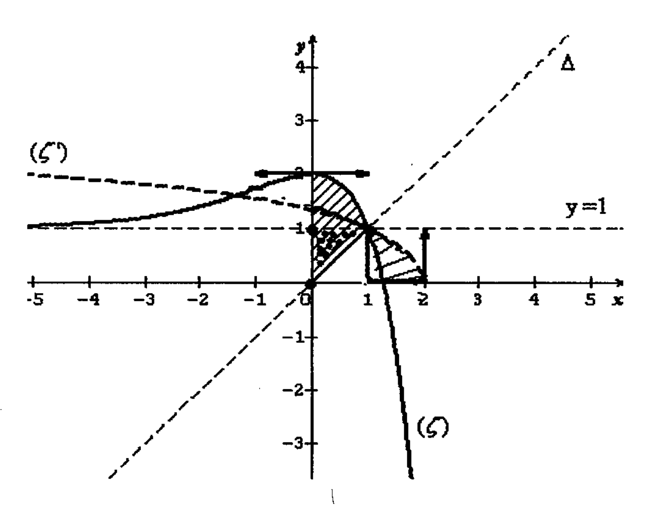
b) le milieu de [AH] a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_H}{2}=0, \frac{y_A+y_H}{2}=2, \frac{z_A+z_H}{2}=1)$ il s'agit de point I donc le milieu de [AH] est I	0.25
c) $d(I,(HBC)) = \frac{\lvert -4-2+15 \rvert}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{3} = 3 \succ R \Rightarrow S \cap (HBC) = \varnothing$	0.75 0.25 méthode 0.25calcul 0.25 Conclusion
a) $0^2+0^2+1^2-4\times 0-2\times 1+1=0$, les coordonnés de J vérifie l'équation de S d'où J appartient à la sphère S	0.25
b) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ Par suite : $d(I,(AJ)) = \frac{\lVert \overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{AJ} \rVert}{\lVert \overrightarrow{AJ} \rVert} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$	0.5 0.25 formule 0.25calcul
c) Comme la distance du centre I de S à la droite (AJ) est égale au rayon R=2 de S ,alors (AJ) est tangente à S	0.5
d) $(AJ): \begin{cases} x=-t \\ y=0 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$	1
Si M(x, y, z) est le point de contacte de (AJ) et (HBC) alors (x, y, z) vérifie Le système $\begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=1+2t \\ x-2y-2z+15=0 \ (4) \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ En remplaçant x , y et z dans l'équation (4) on aura : $-t+0-2-4t+15=0$ donc $t=\frac{13}{5}$ Finalement $\boxed{M(-\frac{13}{5}, 0, \frac{31}{5})}$	(0.5 Représentation paramétrique) 0.25 Système 0.25 reste

Exercice n° 3

	Barème
●  a) $p(M)=\frac{1}{3}$, $p(C/M)=0.8$ et $p(C/\overline{M})=0.75$	**1.5** (3x0.5)
b) 	**0.75** Chaque nœud de deux branches 0.25
● a) $p(C\cap M)=p(M)\times p(C/M)=\frac{1}{3}\times 0.8=\frac{4}{15}\simeq 0.266$	**0.5**
b) $p(C\cap\overline{M})=p(\overline{M})\times p(C/\overline{M})=\frac{2}{3}\times 0.75=\frac{1}{2}=0.5$	**0.5**
c) $C=(C\cap M)\cup(C\cap\overline{M}) \Rightarrow p(C)=p(C\cap M)+p(C\cap\overline{M})$ $=\frac{4}{15}+\frac{1}{2}=\frac{23}{30}\simeq 0.766$	**1** 0.5 formule 0.5calcul
● L'événement E est celle M sachant C : M/C Donc $p(E)=p(M/C)=\frac{p(M\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{23}{30}}=\frac{8}{23}$	**0.75** L'une des 3 réponses $p(E)=p(M/C)$ $p(E)=\frac{p(M\cap C)}{p(C)}$ $p(E)=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{23}{30}}$

Exercice n° 4

	Barème
● **a)** la restriction g de f à $[0,+\infty[$ est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=]-\infty,2]$	**0.5**
b) l'image de $]-\infty,0]$ par f est l'intervalle $]1,2]$ par conséquent f ne s'annule pas sur $]-\infty,0]$. D'après a) g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,2]$ comme $0\in]-\infty,2]$ Alors l'équation g(x) =f(x)= 0 admet une solution unique α dans $[0,+\infty[$ <u>Conclusion</u> : f(x)= 0 admet une solution unique α dans IR	**0.75** 0.25 + 0.5
c) $f(1)=1$ et $f(1,5)=1+e^{1.5}-1.5e^{1.5}\simeq -1.2$ donc $f(1).\,f(1,5)<0$ d'où $1\prec\alpha\prec 1,5$	**0.25**

● a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{-1}\underbrace{e^x}_{+\infty}\right)=-\infty$	0.5
La courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche infinie parabolique de direction celle de (O , $\vec{j}$)	0.25 + 0.25
b) $f(x)-x=1-x+e^x(1-x)=(1-x)(1+e^x)$ et on sait que $1+e^x>0$, $x\in\mathbb{R}$ D'où le signe de $f(x)-x$ est celui de $(1-x)$ • Si $x>1$ ($\mathscr{C}$) est au dessous de Δ • Si $x<1$ ($\mathscr{C}$) est au dessus de Δ	0.75 0.25 : $f(x)-x$ 0.25 : signe 0.25 Position
c) 	0.75 Enlevée 0.25 sur deux éléments manquants : "Asymptotes Intersection avec Δ et (xx') B.Infinie et tangente horizontal "
● ($\mathscr{C}$') = S_Δ($\mathscr{C}$)	0.5
● a) La fonction F est dérivable sur IR et pour tout réel x on a : $F'(x)=1-e^x+(2-x)e^x=1+(-1+2-x)e^x=1+(1-x)e^x=1+e^x-xe^x=f(x)$ Donc F est une primitive de f sur IR	0.5
b) $\mathscr{A}=\int_0^1\lvert f(x)-x\rvert dx=\int_0^1(f(x)-x)dx=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=F(1)-\frac{1}{2}-F(0)=1+e-\frac{1}{2}-2=e-\frac{3}{2}$ D'où $\boxed{\mathscr{A}=(e-\frac{3}{2})\text{ u.a}}$	0.75 $\int_0^1(f(x)-x)dx$ 0.25 $[F(x)]_0^1$:0.25 Reste :0.25
c) $\int_1^2 g^{-1}(x)dx$ désigne l'aire de la région du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$') de g^{-1} l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = 2 par symétrique par rapport à la droite Δ , cette aire est égale à $\mathscr{A}$ moins l'aire du triangle OMN avec M(1,1) et N(0,1) il résulte : $\boxed{\int_1^2 g^{-1}(x)dx=\mathscr{A}-\frac{1}{2}=e-2}$	0.75 0.5: symétrie et interprétation 0.25 le reste

Examen du Baccalauréat
Session principale de Juin 2010

Exercice n° 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- On lance, dix fois de suite, un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
La probabilité que la face numérotée " 2 " apparaisse au moins une fois est égale à

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ c) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

- Soit Ω un univers, p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et E et F deux événements tels que $p(F)=\frac{1}{3}$ et $p(E/F)=\frac{1}{4}$.
$p(\overline{E}\cap F)$ est égal à

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ est égale à

a) 0   b) 1   c) $+\infty$.

- L'intégrale $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ est égale à

a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) $\frac{3}{8}$.

Exercice n° 2 (5 points)

- Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2-(1+i)z+2(1+i)=0$.
  a) Vérifier que $(1-3i)^2=-8-6i$.
  b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2i$, $1-i$, $3-i$ et $3+i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
b) Montrer que le triangle ABD est isocèle.
c) Montrer que les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (AC).
d) Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire l'aire du quadrilatère ABCD.

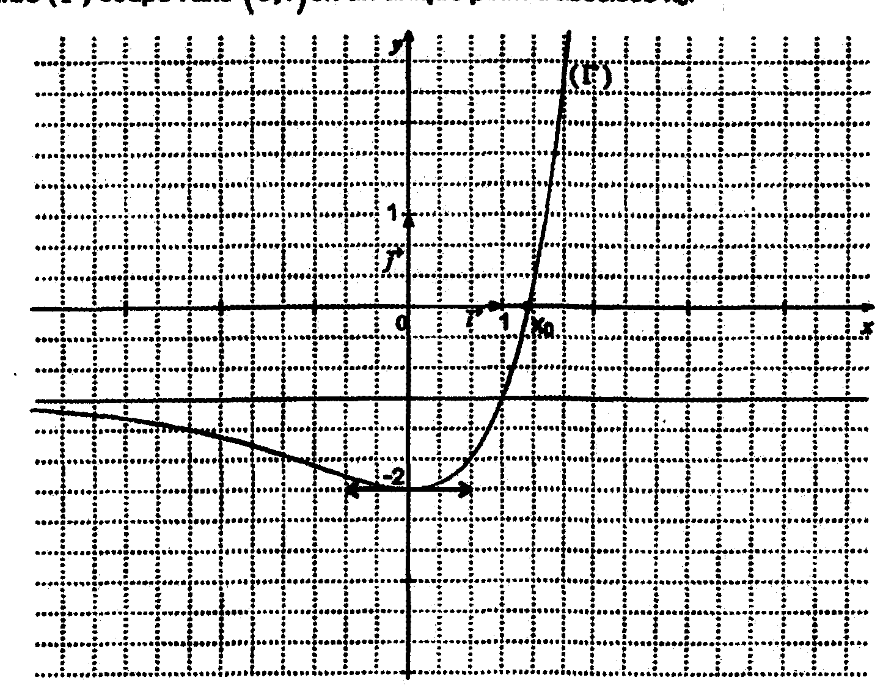
Exercice n° 3 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(0,1,2)$, $B(2,0,3)$, $C(-1,0,0)$ et $I(1,2,1)$.

- a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x+y-z+1=0$.
- Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+3=0$.
  a) Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon.
  b) Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A.
  c) Calculer le volume du tétraèdre IABC.
- Soit H le milieu du segment [IA] et Q le plan passant par H et parallèle à P.
  a) Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle $(\mathscr{C})$.
  b) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

Exercice n° 4 (6 points)

- La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  On sait que :
  - La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.
  - La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.
  - La courbe (Γ) coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en un unique point d'abscisse x_0.



En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

● La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\alpha x + \beta)\, e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x, $g(x) = (x-1)\, e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x+1}{x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

● a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

● a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \dfrac{1}{x_0-1}$.

d) Tracer $(\mathscr{C})$. (on prendra $x_0 = 1{,}2$).

Examen du Baccalauréat
Session Pincipale de Juin 2010
Corrigées

Exercice n° 1 (3 points) — Correction — Barème

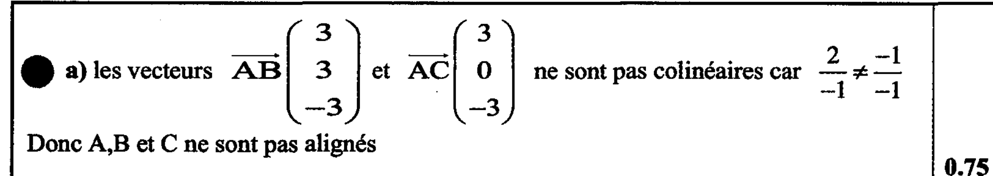
Correction	Barème
● Soit X l'alea numérique qui suit une loi binomiale de paramètre n = 10 et p = $\frac{1}{6}$ $p(X\geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - (\frac{5}{6})^{10}$ — la réponse est c).	0.75
● $p(\overline{E}\cap F) = p(\overline{E}/F)p(F) = [1-p(E/F)]p(F) = \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ — la réponse est b).	0.75
● $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[e^x(e^{-x}+1)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln e^x}{x}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x})$ — la réponse est b). $= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}) = 1$	0.75
● $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}.dx = [\ln(\ln x)]_{\sqrt{e}}^{e} = \ln(\ln e) - \ln(\ln\sqrt{e})$ — la réponse est a). $\ln(1) - \ln(\frac{1}{2}\ln e) = 0 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$	0.75

Exercice n° 2 (5 points)

Correction	Barème
● a) $(1-3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$	0.5
b) $\Delta = (1+i)^2 - 8(1+i) = 2i-8-8i = -8-6i = (1-3i)^2$ d'où une racine carrée de Δ est $1-3i$ et par suite $z' = \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = 1-i$, $z' = \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = 2i$ conclusion $S_{\mathbb{C}} = \{1-i, 2i\}$	1 (4 x 0.25)
● a) [repère avec les points A, B, C, D]	1 (4 x 0.25)
b) $AB = \lvert z_B - z_A\rvert = \lvert 1-3i\rvert = \sqrt{10}$, $AD = \lvert z_D - z_A\rvert = \lvert 3-i\rvert = \sqrt{10}$ ce qui donne AB = AD et par suite le triangle ABD est isocèle de sommet principale A	0.75

c) CD = CB = 2 et AB = AD donc la droite (AC) est la médiatrice de $[BD]$ ainsi les points B et D sont symétrique par rapport à la droite (AC)	**0.75**
d) l'aire de ABC est égale à $\frac{BC.AH}{2}=\frac{2\times 3}{2}=3$ (avec H est le projeté orthogonale de A sur (BC) c'est aussi est le projeté orthogonale de B sur la droite $(O,\vec{v})$ donc $z_H=-i$) l'aire de ABCD est le double de celle de ABC d'où l'aire de ABCD est égale à 6	**1** (2 x0.5) (0.25 formule et idée)

Exercice n° 3 (6 points)



● **a)** les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ Donc A,B et C ne sont pas alignés	**0.75** (3x0.25)
b) les coordonnées des points A,B et C vérifient l'équation x + y – z + 1 : $0+1-2+1=0\rightarrow A\in P$ $2+0-3+1=0\rightarrow B\in P$ $-1+0-0+1=0\rightarrow C\in P$	**0.5**
● **a)** $a=-2$, $b=-4$, $c=-2$ et $d=3$ On a: $h=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=\frac{4+16+4}{4}-3=3\succ 0$ Par suite S est une sphère de rayon $R=\sqrt{h}=\sqrt{3}$ et de centre le point de coordonnées $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$ donc c'est le point I(1,2,1)	**1** (2x0.5)
b) $d(I,P)=\frac{\|1+2-1+1\|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$ d'où la sphère S est le plan P sont tangent $A\in S$ car $IA=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ et A est un point de P d'où A est le point de contact de S est P	**1** (2x0.5)
c) Calcul du volume du tétraèdre ABCD On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $v=\frac{1}{6}.\|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI})\|=\frac{1}{6}.\|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AI}\|$ $=\frac{1}{6}.\|3+3+3\|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$	**1** (0.5 formule 0.5 calculs)
● **a)** $d(I,Q)=IH=\frac{1}{2}IA=\frac{\sqrt{3}}{2}\prec R=\sqrt{3}$ donc le plan Q et la sphère S sont sécant en un cercle (𝒞)	**0.75**
b) H est le projeté orthogonale de I sur le plan Q donc c'est le centre de cercle (𝒞) et le rayon de (𝒞) est égale à $\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$	**1** (0.5 centre 0.5 rayon)

Exercice n° 4 (6 points)

● a) $g(0) = -2$ et $g'(0) = 0$ (tangente horizontale au point d'abscisse 0)

b) Pour tout $x \in \left]-\infty, x_0\right], g(x) \prec 0$ et pour tout $x \in \left[x_0, +\infty\right[, g(x) \geq 0$

0.5 (2x0.25)

0.5

● a) $\boxed{g(0) = \beta - 1}$

Pour tout réel x on a : $g'(x) = (\alpha x + \beta + \alpha)e^x$ donc $\boxed{g'(0) = \beta + \alpha}$

0.75
(0.25 g(0) +0.25 g('x) +0.25 reste)

b) $g(0) = \beta - 1 = -2 \Rightarrow \beta = -1, g'(0) = \beta + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta = 1$ d'où pour tout réel x on a : $g(x) = (x-1)e^x$

0.5
0.25 chaque solution

● a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{x} = 0$ d'où la droite y = 0 est une asymptote à (ζ) en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x + 1}{x} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x + 1}{x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une à (ζ)

1
2x0.25 limite
2x 0.25 interprétation

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$: donc (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

0.25

0.25

● a) pour tout réel x non nul on a : $f'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x + 1)}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

0.5

b)

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
f'(x)	−	‖	+	
f(x)	0 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$f(x_0)$	↗ $+\infty$

0.5

c)

$g(x_0) = 0$ entraine que $e^{x_0} = \dfrac{1}{x_0 - 1}$ et par suite on aura

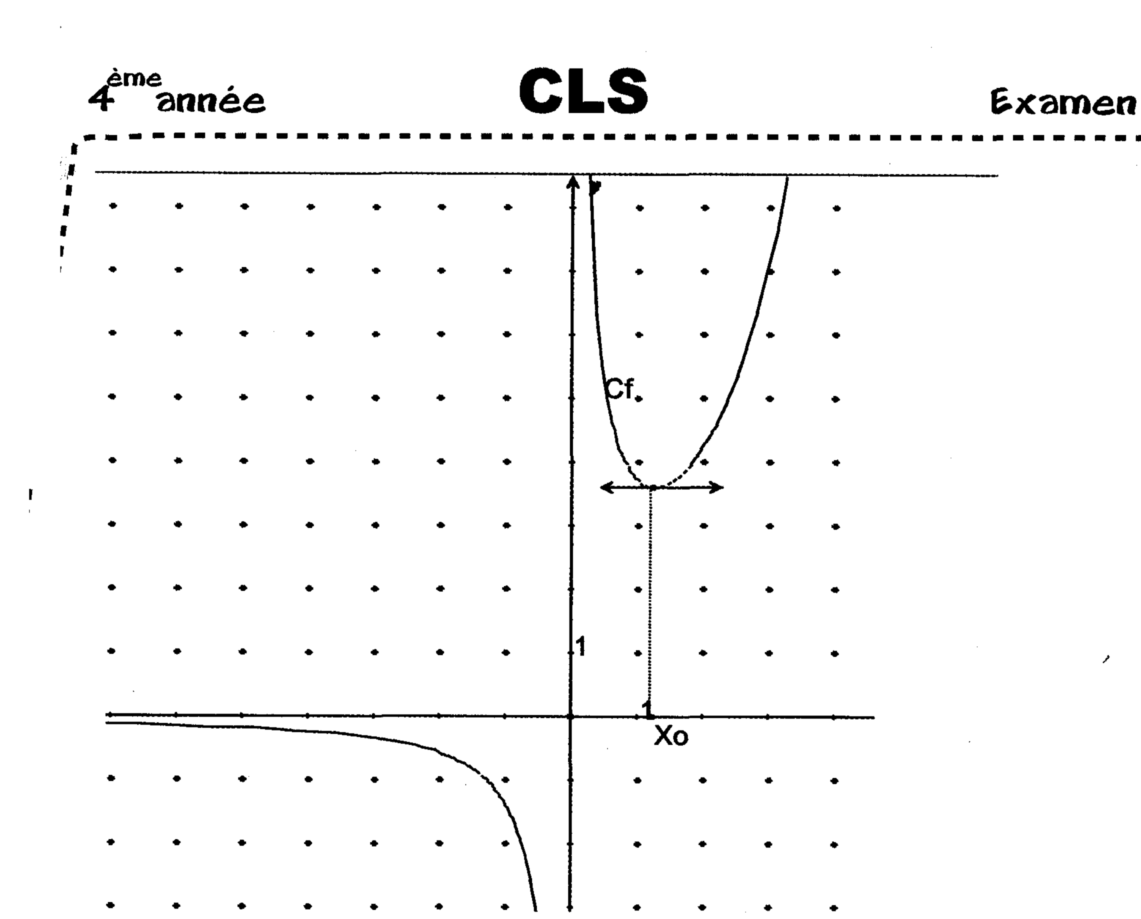
$$f(x_0) = \frac{e^{x_0} + 1}{x_0} = \frac{\dfrac{1}{x_0 - 1} + 1}{x_0} = \frac{\dfrac{\not{1} + x_0 - \not{1}}{x_0 - 1}}{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}$$

0.5

d)

courbe de f

0.75
(- 0.25 chaque élément manquant)


Cf.
1
1
Xo

Examen du Baccalauréat
Session Contrôle N°1 Enoncé

Exercice n° 1 (9 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

ξ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

- a) Etudier la continuité de la fonction f on 0
  b) Montrer alors que f est continue sur IR
- a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $-(\dfrac{1+x}{x}) \leq f(x) \leq \dfrac{1-x}{x}$
  b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
  c) Interpréter le résultat trouvé géométriquement
- Montrer que la droite d'équation : $y = -(x+1)$, est une asymptote oblique pour ξ au voisinage de $-\infty$
- Déterminer $f(\,]-\infty, 0])$
- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(\dfrac{1+x}{1-x})$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(\dfrac{1+x}{1-x})$

Exercice n° 2 (8 points)

Soit dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Les points A et B d'affixes respectives $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

- Déterminer l'écriture exponentielle de z_1 et z_2
- Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O
- a) Placer A, B et le point C tel que OACB soit un carré
  b) Déduire l'écriture trigonométrique de z_3 affixe de C
- a) Montrer que $z_3 = \sqrt{3} - 1 - i(1 + \sqrt{3})$
  b) En déduire la valeur de : $\tan(\dfrac{5\pi}{12})$

Exercice n° 3 QCM (3 points)

Recopier sur votre copie la bonne réponse choisie parmi a), b) ou c)

- Si $z = m + i$, m étant un nombre complexe de partie imaginaire non nul, alors on a :

  a) $\overline{z} = m - i$ b) $\overline{z} = -i - \overline{m}$ c) $\overline{z} = -i + \overline{m}$

- L'équation : $x^3 + 5x + 1 = 0$ admet dans l'intervalle $]-1, 0[$

  a) une unique solution b) deux solutions c) trois solutions

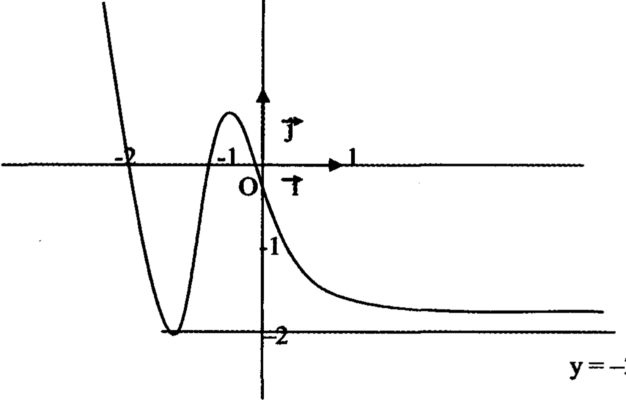
- (C) est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé et $y = -2$ asymptote en $+\infty$ on a :

a) $f([-2, 0]) = [-2, 1]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\sqrt{3|x| + 4}\right) = -2$



c) Le domaine de définition de f est $[-2, +\infty[$



Examen du Baccalauréat
Session Contrôle Corrigé

Exercice n° 1 (9 points)

● a)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{1+x^2} - 1 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} - 1 = 1 - 1 = 0 = f(0)$$

f est continue à droite et à gauche en 0 par suite f est continue en 0

b) $1+x^2 \succ 0$ pour tout réel x donc f est continue sur $]-\infty, 0]$

Pour $x \neq 0$ les fonctions x et $\sin x - x$ sont continuent d'où $\frac{\sin x - x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et comme f est continue en 0 entraine que f est continue sur IR

● a) pour tout $x > 0$, on a : $-1 \le \sin x \le 1$ équivaut à : $-x-1 \le \sin x - x \le 1-x$, en divisons par x > 0,

on aura $\frac{-1-x}{x} \le \frac{x-\sin x}{x} \le \frac{1-x}{x}$ d'où pour tout $x > 0$, on a : $-(\frac{1+x}{x}) \le f(x) \le \frac{1-x}{x}$

b) on a : $\lim_{x\to+\infty} -(\frac{1+x}{x}) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} - 1 = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1-x}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1$ d'où d'après le théorème de comparaison : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ entraine que la droite x = - 1 est une asymptote à la courbe ξ en $+\infty$

●

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - [-(1+x)] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - 1 + 1 + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Par suite la droite d'équation : y = – (x + 1) , est une asymptote oblique pour ξ au voisinage de $-\infty$

● $f(]-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{-\infty} f\right[= [0,+\infty[$ car f est décroissante puisque $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \le$ pour $x \le 0$

● $\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ donc $\lim_{x\to 1^-} f(\frac{1+x}{1-x}) = -1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to 1^+} f(\frac{1+x}{1-x}) = +\infty$

Exercice n° 2 (9 points)

● $^*z_1 = \sqrt{3} - i$, on a $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$

Soit θ un argument de z_1 on a : $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$ par suite $\boxed{z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

$^*z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, on a $|z_2| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit α un argument de z_1 on a : $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

par suite $\boxed{z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$ car $\frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

● $OA = |z_1| = 2$ et $OB = |z_2| = 2$ d'où OA = OB ce qui prouve que le triangle OAB est isocèle de sommet O

Aussi on a $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} - i}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{i(-1 - i\sqrt{3})}{-1 - i\sqrt{3}} = i$ imaginaire pur donc (OA) et (OB) sont perpendiculaires en O

Ou bien : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ donc $(OA) \perp (OB)$

<u>Conclusion</u> : le triangle OAB est isocèle et rectangle en O

● **a) figure**

b) OACB est un carré donc : $Arg(z_3) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

et $|z_3| = OC \underset{Pythagore}{=} \sqrt{OA^2 + AC^2} = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ d'où $\boxed{z_3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

● **a) OACB est un parallélogramme (carré)**

donc $aff(\overrightarrow{OA}) = aff(\overrightarrow{BC})$ donc $z_1 = z_3 - z_2$ par suite $z_3 = z_1 + z_2$ ce qui donne $z_3 = \sqrt{3} - i - 1 - i\sqrt{3}$

d'où $z_3 = \sqrt{3} - 1 - i(1 + \sqrt{3})$

b) On a :

$$z_3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} - i2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 - i(1 + \sqrt{3})$$

donc $\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}}{2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ ce qui prouve que $\boxed{\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}}$

Exercice n° 3 (3 points)

● $\overline{z} = \overline{m + i} = \overline{m} + \overline{i} = \overline{m} - i = -i + \overline{m}$ Donc **la réponse est c)**

● $g(x) = x^3 + 5x + 1$, on a : $g(-1).g(0) = -5 \times 1 = -5 \prec 0$ et on a g est continue et strictement coissante

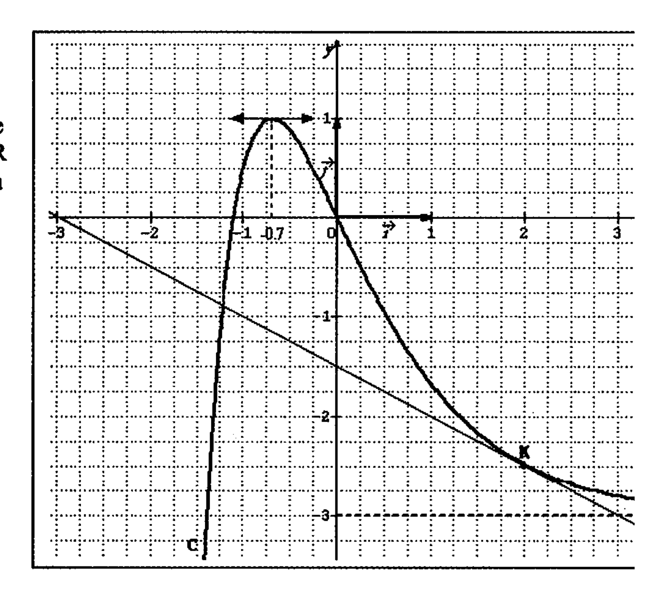
Car $g(x) = 3x^2 + 5 \succ 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires Donc **la réponse est a)**

● $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3|x| + 4} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ d'ou $\lim_{x \to -\infty} f(\sqrt{3|x| + 4}) = -2$ Donc **la réponse est b)**

Examen du Baccalauréat
Session Contrôle N°1
proposition 2

Exercice n° 1 (3 points)

- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- La courbe C ci-contre est celle d'une fonction h définie et dérivable sur IR
- La droite D est une tangente à C au point K



Utiliser le graphe pour répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h(x)}{x}$

2) Déterminer h (0) et h' (2)

3) Dresser le tableau de variation de h

Exercice n° 2 (9 points)

Soit f la fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

ξ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

● Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

● a) Montrer que f est dérivable sur IR et que : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau des variations de f

c) Ecrire l'équation de la tangente T à ξ au point d'abscisse 0

● Tracer ξ et T

● Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$

a) Montre que g réalise une bijection notée g^{-1} de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

b) Tracer ξ' la courbe représentative de g^{-1}

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

● Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = f(x^2)$. Dresser le tableau des variations de F

Exercice n° 3 (8 points)

● a) Calculer : $(1+3i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+i)z+4=0$

● Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3-(5+i)z^2+2(5+i)z-8=0$

a) Vérifier que 2 est une solution de (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

● Soit dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Les points A , B et C d'affixes respectives 2, 2 + 2i et 1 – i

a) Déterminer l'écriture exponentielle de z_B et z_C

b) Montrer que le triangle OBC est rectangle en O

c) Soit D le symétrique du point C par rapport au point A .
Montrer que OBDC est un rectangle

Enonce Devoire de Synthèse N°1 proposition 1

Exercice n° 1 (8 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1-\cos 2\sqrt{x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Montrer que f est continue en 0
- Montrer que la droite Δ d'équation : $y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$
- a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$

  b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement
- Calculer $\lim\limits_{x \to -1} f\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}x}{1+x}\right)$

Exercice n° 2 (8,25 points)

- a) Calculer : $(1+3i)^2$

  b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$
- Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+i)z - 8 = 0$

  a) Vérifier que 2 est une solution de (E)

  b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
- Soit dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

  Les points A , B et C d'affixes respectives 2, $2+2i$ et $1-i$

  a) Déterminer l'écriture exponentielle de z_B et z_C

  b) Montrer que le triangle OBC est rectangle en O

  c) Soit D le symétrique du point C par rapport au point A .
  Montrer que OBDC est un rectangle

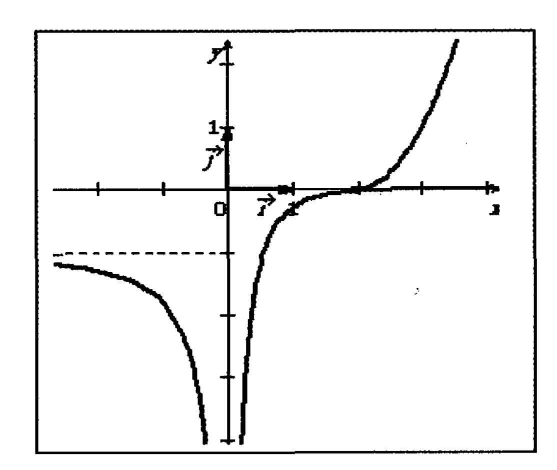
Exercice n° 3 (3,75 points)

On donne la courbe représentative d'une fonction g définie sur

IR, ou y = -1 est une asymptote :

Répondre par vrai ou faux

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$
- $g([2,+\infty[) = [0,+\infty[$
- $g(x) = -2$ admet une unique solution dans $]-2,0[$
- g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$
- $g(x) - x = 0$ admet une unique solution dans IR



Devoire de Synthèse N°1
Corrigé

Exercice n° 1 (8 points)

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2+4} = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2^2}{2} = 2 = f(0)$$

f est continue à droite et à gauche en 0 par suite f est continue en 0

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)-[-x] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4}+x)(\sqrt{x^2+4}-x)}{\sqrt{x^2+4}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2-x^2)}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\sqrt{4+x^2}-x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Par suite la droite d'équation : $y = -x$, est une asymptote oblique pour C_f au voisinage de $-\infty$

- a)

pour tout $x > 0$, on a : $-1 \le \cos 2\sqrt{x} \le 1$ équivaut à : $0 \le 1-\cos 2\sqrt{x} \le 2$, en divisons par $x > 0$,

on aura : $0 \le \frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{x} \le \frac{2}{x}$ d'où pour tout $x > 0$, on a : $0 \le f(x) \le \frac{2}{x}$

b) on a : $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{x}) = 0$ et d'où d'après le théorème de comparaison : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ce qui entraine que la droite x = 0 est une asymptote à la courbe C_f en $+\infty$

- $$\lim_{x\to-1} f\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \quad \lim_{x\to-1} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-1} f\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{5}x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{5}x}{x} = -\sqrt{5} \text{ et } \lim_{x\to-\sqrt{5}} f(x) = f(-\sqrt{5}) = \sqrt{(-\sqrt{5})^2+4} = \sqrt{9} = 3$$

Exercice n° 2 (8,25 points)

● a) $(1+3i)^2 = 1+6i-9 = -8+6i$

b) $\Delta = (3+i)^2 - 16 = 9+6i-1-16 = -8+6i = (1+3i)^2$

d'où une racine carrée de Δ est $1+3i$ et par suite $z' = \frac{(3+i)+(1+3i)}{2} = 2+2i$,

$z' = \frac{(3+i)-(1+3i)}{2} = 1-i$ <u>conclusion</u> $S_{\mathbb{C}} = \{1-i, 2+2i\}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

● (E) : $z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+i)z - 8 = 0$

a) $2^3 - (5+i)2^2 + 2(5+i)2 - 8 = 8 - 20 - 4i + 20 + 4i - 8 = 0$ donc 2 est une solution de (E)

b) $z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+i)z - 8 = (z-2)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

Par identification on a : $\begin{cases} a-2 = -5-i \\ b-2a = 10+2i \\ -2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -3-i$ et $b = 4$

On aura donc : $z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+i)z - 8 = (z-2)(z^2 - (3+i)z + 4)$ par suite :

$z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+i)z - 8 = 0$ Signifie $z-2=0$ ou $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

D'ou les solutions de (E) sont 2, $2+2i$ et $1-i$

●

a) *$z_B = 2+2i$, on a $|z_B| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Soit θ un argument de z_b on a : $\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ par suite $\boxed{z_B = 2e^{i\frac{\pi}{4}}}$

*$z_C = -1-i$, on a $|z_C| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Soit α un argument de z_C on a : $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

par suite $\boxed{z_C = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

b) $\dfrac{aff(\overrightarrow{OB})}{aff(\overrightarrow{OC})}=\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{(2+2i)(1+i)}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$ imaginaires pur

donc (OC) et (OB) sont perpendiculaires par suite OBC est rectangle en O

b) D le symétrique du point C par rapport au point A équivaut à

$$z_A=\frac{z_D+z_C}{2} \text{ donc } z_D=2z_A-z_C=4-1-i=3-i$$

- $aff\overrightarrow{OB}=2+2i$ et $aff\overrightarrow{CD}=z_D-z_C=3+i-1+i=2+2i$ donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}$

D'où OBDC est un parallélogramme (1) et comme (OC) et (OB) sont perpendiculaires on aura

OBDC est un rectangle

Exercice n° 3 (3,75 points)

- Faux
- Vraie
- Vraie
- Faux
- Faux

Devoire de Contrôle N°2
Enoncé

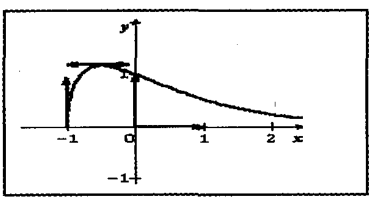
Exercice n° 1 (3 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{1-x}$ est égale à : **a)** 0 **b)** – 1 **c)** 1

- Une primitive de la fonction $f(x) = 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est égale à :
  a) $2x - x\ln x$ **b)** $\dfrac{1}{x}$ **c)** $-\dfrac{1}{x}$

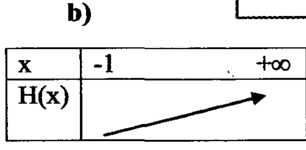
- On donne la courbe représentative d'une fonction h alors le tableau donnant le sens de variation de la fonction primitive H de h est :



a)

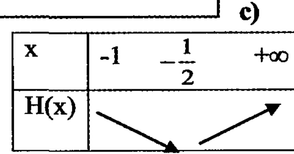
x	-1 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad +\infty$
H(x)	↗ ↘

b)



x	-1 $\quad +\infty$
H(x)	↗

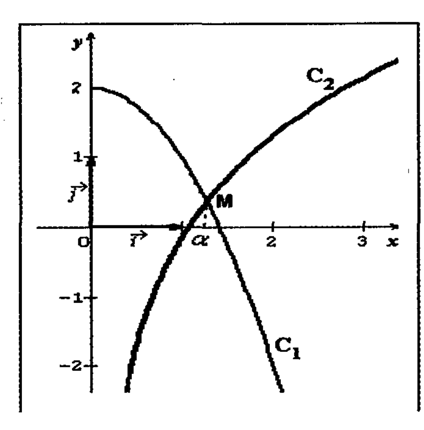
c)



x	-1 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad +\infty$
H(x)	↘ ↗

Exercice n° 2 (10 points)

- Dans la figure ci-contre C_1 et C_2 sont les courbes représentatives respectivement des fonctions :
  $u(x) = 2 - x^2$; $x \geq 0$ et $v(x) = 2\ln x$; $x \in]0, +\infty[$
  Le point M d'abscisse α est l'intersection de C_1 et C_2
  Avec : $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$
  a) Déterminer la position relative de C_1 et C_2
  b) Déduire selon α le signe de $u(x) - v(x)$



- On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{2\ln x}{x}$$

($\mathscr{C}$) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{u(x) - v(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

- a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = -x + 3$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$)
  b) Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à Δ
  c) Ecrire une équation de la tangente T à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1
- Tracer ($\mathscr{C}$) et Δ (on prendra $f(\alpha) \approx 2.1$)
- a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \alpha]$ sur $]-\infty, f(\alpha)]$
  b) Tracer la courbe ($\mathscr{C}_1$) représentative de f^{-1}
- Calculer $(f^{-1})'(2)$

Exercice n° 3 (7 points)

L'espace E étant rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 1, 2)$ et $K(0, 0, \sin\theta)$, $\theta \in]0, \pi[$

- Montrer que les points O, B et A déterminent un plan $\mathscr{P}$ d'équation: $x + z = 0$
- a) Calculer la distance d de K au plan P et déduire que O, A, B et K sont non coplanaires
  b) Calculer en fonction de θ le volume V du tétraèdre OABK
  c) Déduire la valeur de θ pour que $V = \frac{1}{6}$
- Pour la suite on prend $\sin\theta = 1$. Soit S la sphère de centre K et de rayon 1
  a) Montrer que S coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle C dont on précisera le rayon et le centre I
  b) Vérifier que $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OI}$ et déduire l'aire du triangle OIK

Devoire de Contrôle N°2
Corrigé

Exercice n° 1 (3 points)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{x}{1-x}=0\times(-1)=0$ Donc **la réponse est a)**

- la primitive sur] 0 , + ∞ [de lnx est xlnx –x est celle de 1 est x d'où la primitive de la fonction

  f (x) sur] 0 , + ∞ [est x – (xlnx – x) = 2x – xlnx Donc **la réponse est a)**

- H'(x) = h(x) ≥ 0 (courbe au dessus de l'axe des abscisses d'où H est st croissante : **la réponse est b)**

Exercice n° 2 (10 points)

- **a)** Si $0<x\le\alpha$ la courbe C_1 est au dessus de la courbe C_2
  Si $x\ge\alpha$ la courbe C_1 est au dessous de la courbe C_2

b)

x	0	α	$+\infty$
Signe de u (x) – v (x)	+	0	–

- **a)** pour tout x de] 0 , + ∞ [on a : $f'(x)=\left(-x+3+\dfrac{2\ln x}{x}\right)'=-1+0+\dfrac{2(\frac{1}{x}.x-\ln x)}{x^2}=-1+\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2-x^2-2\ln x}{x^2}=\frac{u(x)-v(x)}{x^2}\ ,\ x\in]0,+\infty[$$

b) puisque x^2 est positif, le signe de f'(x) est celui de e signe de u (x) – v (x)

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	–	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+3+\underset{0}{\frac{2\ln x}{x}}\right)=-\infty$$

$$\text{et }\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-x+3+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+}\to-\infty$$

- **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underset{0}{\dfrac{2\ln x}{x}}=0$ donc la droite d'équation y = – x + 3 est une asympto oblique à ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f

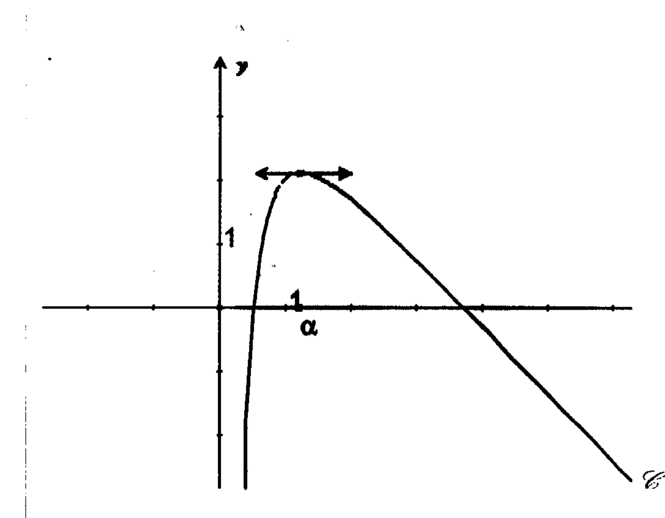
b) $f(x)-(-x+3)=\dfrac{2\ln x}{x}$ **et** $x \succ 0$ (on aura le signe de ln(x))

par suite : si $x \geq 1$ ($\mathscr{C}$) **et au dessus de** Δ

si $0 < x \leq 1$ ($\mathscr{C}$) **et au dessous de** Δ

c) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + 2 = x + 1$

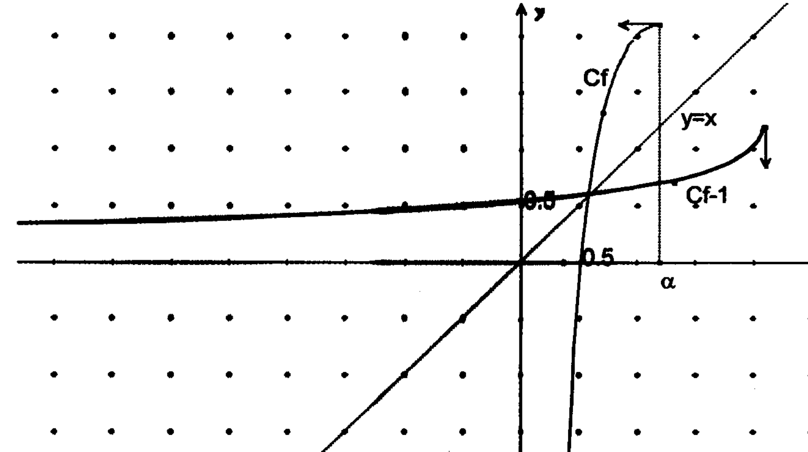
●



● **a)** f est continue et **strictement** croissante **sur**]0 , α] donc elle réalise une bijection de]0 , α] sur l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to0^+} f, f(\alpha)\right[= \left]-\infty, f(\alpha)\right]$

f^{-1} **définie sur l'intervalle** $\left]-\infty, f(\alpha)\right]$

b) courbe de f^{-1}



● **6)** $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(1)} = 1$ car $f(1) = 2$

Tome 1

CLS سلسلة جديدة موافقة للبرامج الرّسميّة و الكتب المدرسيّة الجاري بها العمل . تطوّر سلسلة CMS السّابقة و تتجاوز نقائصها و تحيّن معطياتها و تنقّح دروسها و تغطّي جميع المستويات التّعليميّة، و تساعد التّلاميذ على فهم الدّروس و استيعابها، و التّدرّب على حلّ مختلف أنماط التّمارين و تطوير قدراتهم و مهاراتهم و كفاياتهم، و تحقيق الأهداف المنتظرة من خلال :

* إصلاح دقيق و واضح لجميع التّمارين الواردة بالكتب المدرسيّة
* فروض متنوّعة تغطّي مختلف المفاهيم و المحتويات و المحاور

CLS est une version revue et corrigée de la collection (CMS) .
CLS est conforme aux programmes officiels et aux livres scolaires en vigueur . **CLS** couvre tous les niveaux et toutes les disciplines .
CLS s'adresse à tous les apprenants à fin de les aider .
* à développer leurs capacités, aptitudes et compétences
* et atteindre les objectifs attendus



Corrigés de Livre Scolaire

I.S.B.N : 978-9938-17-217-1







شركة دار الماسة للنشر
Société Dar El Messa d'Édition
Tél : 31 502 449 - Fax : 71 494 004
GSM : 50 379 001

